

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

069
AMN
Section 1
V. 8

VERHANDELINGEN
DER
KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN
WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen)

DEEL VIII
MET 2 PLATEN

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER
Juli 1904

069
AMN
Section 1
v. 8

INHOUD.

1. K. BES. L'équation finale.
 2. d°. Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables.
 3. C. EASTON. La distribution de la lumière galactique, comparée à la distribution des étoiles cataloguées, dans la voie lactée boréale (Avec 2 planches).
 4. E. MULDER. Electrolyse van eenige zilver-zouten, en over de reactie van waterstofsuperoxyde met zilveroxyde, zilverbioxyde, enz. (8^{ste} verhandeling).
 5. W. A. VERSLUYS. Focales des courbes planes et gauches. 1^{re} partie. Focales des coniques et focales de courbes planes qui n'occupent pas de position particulière.
 6. K. BES. La dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques.
 7. H. DE VRIES. Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von den ebenen Curven.
-
- 415351

L'ÉQUATION FINALE

PAR

K. BES,

Professeur à l'école moyenne de l'Etat „Willem II” à Tilbourg.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel VIII. N° 1.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

1901.

TABLE DES MATIÈRES.

L'équation finale	5
Chapitre I. Elimination entre deux équations homogènes à trois variables	6
Première méthode	6
Deuxième méthode, par laquelle on obtient les mêmes résultats	16
Quelques propriétés des coefficients des équations finales	19
Résultats obtenus pour des valeurs du degré de la fonction F inférieures au produit des degrés des deux équations données	27
Chapitre II. Elimination entre n équations homogènes à $n + 1$ variables	31
Extension des théories du chapitre précédent	31
Evaluation d'une fonction homogène quelconque des valeurs qui forment un système de racines de n équations homogènes à $n + 1$ variables	41
Chapitre III. Elimination entre n équations homogènes à $n + n_1$ variables	45
Notes	57
1. Quelques théorèmes sur les coefficients binominaux	57
2. Quelques remarques relatives aux résultats obtenus par l'application des théories exposées dans ce mémoire	59

L'équation finale.

§ 1. On appelle équation finale le résultat que l'on obtient en éliminant $n-1$ variables entre n équations homogènes à $n + n_1$ variables.

Pour opérer cette élimination, nous multiplierons les $n_1 + 1$ variables qu'on veut garder, par un facteur quelconque, qu'on considère comme une nouvelle variable. En ordonnant les équations données suivant les arguments consécutifs des n autres variables, on obtient n équations homogènes dont les coefficients sont des fonctions homogènes des $n_1 + 1$ variables qu'on veut garder. Ces coefficients sont du premier degré par rapport aux coefficients des équations données. Leur degré par rapport aux variables qui y entrent, est égal à l'exposant de la variable auxiliaire dans le terme dont fait partie le coefficient considéré.

En éliminant entre ces n équations homogènes les n variables explicites, on obtiendra l'équation finale des équations données sous la forme du résultant de n équations homogènes à n variables. Si les équations données sont respectivement des degrés g_1, g_2, \dots, g_n , ce résultant est une fonction homogène des coefficients de ces équations du degré $g_1 g_2 \dots g_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k}$, tandis que son degré par rapport aux coefficients de la première équation est $g_2 g_3 \dots g_n$, par rapport aux coefficients de la deuxième $g_1 g_3 \dots g_n$, et ainsi de suite.

Par rapport aux variables qui y entrent, ce résultant est du degré $g_1 g_2 \dots g_n$, comme on le démontre en considérant le poids du résultant de n équations homogènes à n variables ¹⁾.

Au lieu de développer le résultant des n équations considérées, il serait plus aisé de former immédiatement l'équation finale ordonnée suivant les arguments consécutifs d'une fonction homogène des $n_1 + 1$ variables restantes. On peut y parvenir d'après la

¹⁾ Voir: G. Salmon, Leçons d'Algèbre Supérieure, n° 77.

méthode d'élimination dite Bezout, comme il sera démontré dans la suite de ce mémoire ¹⁾.

I. Elimination entre deux équations homogènes à trois variables.

PREMIÈRE MÉTHODE.

§ 2. Soient

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z) &\equiv a_1 x^l + a_2 x^{l-1} y + a_3 x^{l-1} z + a_4 x^{l-2} y^2 + a_5 x^{l-2} y z \\ &\quad + a_6 x^{l-2} z^2 + a_7 x^{l-3} y^3 + \dots + a_{\frac{(l+1)(l+2)}{2}} z^l = 0, \\ \chi(x, y, z) &\equiv b_1 x^m + b_2 x^{m-1} y + b_3 x^{m-1} z + b_4 x^{m-2} y^2 + b_5 x^{m-2} y z \\ &\quad + b_6 x^{m-2} z^2 + b_7 x^{m-3} y^3 + \dots + b_{\frac{(m+1)(m+2)}{2}} z^m = 0, \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

les équations données, respectivement des degrés l et m .

L'équation finale contient dans ce cas deux variables et est du degré lm .

Formons la fonction homogène de degré quelconque

$$F \equiv \Phi \varphi + X \chi. \dots \dots \dots (2),$$

dans laquelle Φ et X sont des fonctions homogènes à coefficients indéterminés s_1, s_2, s_3 , etc. Tout système de racines des équations (1) satisfait aussi à l'équation

$$F = 0. \dots \dots \dots (3).$$

Quand il est possible de trouver pour les grandeurs s des valeurs qui réduisent la fonction F à une fonction de deux variables, l'équation (3) sera l'équation finale, un facteur ou un multiple de cette équation, selon que le degré de l'équation trouvée est égal, supérieur ou inférieur à lm .

§ 3. Supposons en premier lieu le degré de la fonction F arbitraire. Le degré de F étant k , ceux des fonctions Φ et X sont respectivement $k-l$ et $k-m$. La fonction F contient alors $v = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ termes et les fonctions Φ et X respectivement

¹⁾ Comparer: Théorie générale de l'élimination, d'après la méthode Bezout, suivant un nouveau procédé (Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam [Eerste Sectie], deel VI, n° 7).

$$\alpha_1 = \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} \text{ termes.}$$

En développant la fonction F suivant les arguments consécutifs d'une fonction homogène des variables x, y, z ; puis, suivant les quantités s_1, s_2, s_3 , etc., on obtient l'identité

$$\left. \begin{aligned} x^k \theta_1 + x^{k-1} y \theta_2 + x^{k-2} z \theta_3 + x^{k-3} y^2 \theta_4 + \dots + z^k \theta_v \equiv \\ s_1 x^{k-l} \varphi + s_2 x^{k-l-1} y \varphi + s_3 x^{k-l-2} z \varphi + \dots + s_{\alpha_1} z^{k-l} \varphi \\ + s_{\alpha_1+1} x^{k-m} \chi + s_{\alpha_1+2} x^{k-m-1} y \chi + \dots + s_{\alpha_1+\alpha_2} z^{k-m} \chi \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

Les grandeurs θ du premier membre de cette identité sont des fonctions linéaires homogènes des indéterminées s . L'assemblant des coefficients de ces fonctions linéaires contient v lignes de $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ éléments, représentés en partie par des coefficients des équations (1), en partie par des zéros. Les α_1 premières colonnes de cet assemblant renferment exclusivement des coefficients de la fonction φ et des zéros, les α_2 suivantes exclusivement des coefficients de la fonction χ et des zéros.

§ 4. Il est possible de satisfaire à l'équation (3) indépendamment des valeurs des variables x, y, z , alors il existe un système de racines s' pour toutes les équations

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= 0, \\ \theta_2 &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ \theta_v &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

La forme de la fonction F fait obtenir immédiatement quelques systèmes de racines s' pour ces équations. Ecrivant l'équation (3) dans la forme

$$\frac{\Phi}{\chi} = \frac{-X}{\varphi} \dots \dots \dots (6),$$

les deux membres deviendront égaux pour toutes les valeurs des variables x, y, z , si l'on pose

$$\Phi \equiv \chi f \text{ et } X \equiv -\varphi f \dots \dots \dots (7),$$

où f est une fonction homogène du degré $k-l-m$ des variables x, y, z . On peut satisfaire à ces équations d'autant de manières que la fonction

$$f \text{ a de termes, c'est-à-dire de } v_2 = \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2}$$

manières. On obtient ainsi pour les équations (5) v_2 systèmes de racines s' .

§ 5. Ces v_2 systèmes de racines s' sont indépendants.

Pour le démontrer, multiplions-les respectivement par les arbitraires t_1, t_2, \dots, t_{v_2} , et ajoutons-les; les fonctions linéaires homogènes ainsi obtenues, égalées à zéro, forment v_1 équations linéaires homogènes t .

Ces équations peuvent se réduire aux deux groupes suivants:

Groupe I, se composant de α_1 équations dont les coefficients ne renferment pas d'éléments a ,

Groupe II, se composant de α_2 équations dont les coefficients ne renferment pas d'éléments b .

Multiplions les équations de chaque groupe successivement par les arguments consécutifs d'une fonction homogène — respectivement des degrés $k-l$ et $k-m$ — des trois variables x, y, z , où x, y, z sont des grandeurs arbitraires, et ajoutons les résultats de chaque groupe; on obtiendra les deux équations

$$T\chi = 0, \quad T\varphi = 0 \dots\dots\dots (8),$$

dans lesquelles la grandeur T représente une fonction homogène du degré $k-l-m$ des trois variables x, y, z , dont les coefficients seront les v_2 arbitraires t .

Si les systèmes de racines s' n'étaient pas indépendants, on pourrait satisfaire aux équations (8) — x, y, z étant arbitraires — par un système de valeurs t' qui ne se compose pas de zéros seuls. Ce système de valeurs t' constituerait un système de racines des équations t .

Comme on ne saurait satisfaire aux équations (8) indépendamment des valeurs des variables x, y, z , qu'en choisissant pour les arbitraires t des zéros, il n'existe pas de système de racines pour les équations t .

Par conséquent, les v_2 systèmes de racines s' sont indépendants.

§ 6. Les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines s' sont premiers entre eux.

En effet, s'ils avaient un commun diviseur qui fût une fonction des coefficients des fonctions φ et χ , il existerait dans le cas où les coefficients auraient des valeurs qui annuleraient le commun diviseur, au moins un système de racines t' pour les équations t .

C'est impossible, comme il a été démontré au paragraphe précédent; donc, il est de même impossible que les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines s' aient un commun diviseur, fonction des coefficients des fonctions φ et χ .

§ 7. En substituant les valeurs

$$\left. \begin{aligned}
 v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \\
 v_1 &= \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} + \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} = \\
 &2. \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{(2k+3)(l+m)}{2} + \frac{l^2+m^2}{2}, \\
 v_2 &= \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} = \\
 &\frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{(2k+3)(l+m)}{2} + \frac{(l+m)^2}{2},
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

dans la forme $v - v_1 + v_2$, on vérifie aisément la relation

$$v - v_1 + v_2 = lm \dots\dots\dots (10).$$

§ 8. Comme on ne peut satisfaire à l'équation (6) indépendamment des valeurs des variables x, y, z par plus de v_2 systèmes de valeurs s' indépendants, il n'existe pour toutes les équations θ que v_2 systèmes de racines s' indépendants entre eux. L'équation (10) nous montre que les équations θ sont liées par lm relations linéaires indépendantes, car on sait que la relation

$$k_1 - k = n - m \dots\dots\dots (11)$$

est vérifiée, si m équations linéaires homogènes à n variables, liées par k relations linéaires indépendantes, ont en tout k_1 systèmes de racines indépendants, et réciproquement ¹⁾.

Quand on donne à l'équation (4) la forme

$$\begin{aligned}
 p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_3 \theta_3 + \dots + p_v \theta_v &\equiv s_1 \zeta_1 + s_2 \zeta_2 \dots \\
 &+ s_{z_1} \zeta_{z_1} + s_{z_1+1} \zeta_{z_1+1} + \dots + s_{z_1+z_2} \zeta_{z_1+z_2} \dots\dots\dots (12),
 \end{aligned}$$

les symboles ζ représentent les fonctions linéaires qu'on peut former des colonnes de l'assemblant de la fonction F .

Comme les équations θ sont liées par lm relations linéaires indépendantes, on pourra satisfaire aux équations ζ par lm systèmes de racines indépendants entre eux.

§ 9. L'assemblant des v_2 systèmes de racines s' est supplémen-

¹⁾ Voir: Théorie générale de l'élimination, § 56*.

taire à tout assemblant qu'on peut former avec $v - lm$ lignes quelconques de l'assemblant de la fonction F . Les déterminants contenus dans $v - lm$ lignes quelconques de cet assemblant sont donc divisibles par leur déterminant supplémentaire de l'assemblant des systèmes de racines s' , et tous les déterminants contenus dans $v - lm$ colonnes de l'assemblant de la fonction F sont divisibles par le même déterminant supplémentaire de l'assemblant des systèmes de racines s' .

§ 10. Après cette digression sur les propriétés de l'assemblant de la fonction F nous revenons au problème de la détermination des valeurs s qui réduisent la fonction F à une fonction de deux variables.

Pour que ce cas se présente, il faut que les coefficients de tous les termes de la fonction F qui ont pour facteur une même variable s'évanouissent et que ce ne soit pas le cas avec tous les autres. Le nombre $v - k - 1$ de ces coefficients doit donc être inférieur à $v - lm$, car les v équations θ sont liées par lm relations linéaires indépendantes. La différence entre $v - lm$ et $v - k - 1$, c'est-à-dire $k + 1 - lm$, est donc un nombre positif. Il s'ensuit que la plus petite valeur qu'on puisse donner à k , pour obtenir immédiatement l'équation cherchée à deux variables est lm .

Pour $k = lm$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{(lm+1)(lm+2)}{2} = \binom{lm+2}{2} , \\ v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 , \\ \alpha_1 &= \frac{(lm-l+1)(lm-l+2)}{2} = \binom{lm-l+2}{2} , \\ \alpha_2 &= \frac{(lm-m+1)(lm-m+2)}{2} = \binom{lm-m+2}{2} , \\ v_2 &= \frac{(lm-l-m+1)(lm-l-m+2)}{2} = \binom{lm-l-m+2}{2} , \end{aligned} \right\} \dots (13).$$

L'équation obtenue pour cette valeur de k est l'équation finale.

Nous verrons bientôt que l'on peut aussi obtenir dans quelques cas l'équation à deux variables en prenant pour le degré de la fonction F une valeur inférieure à lm , mais le degré de l'équation ainsi obtenue ne descend pas à lm .

§ 11. On peut satisfaire à $v-k-1$ équations linéaires homogènes indépendantes à v_1 variables par $v_1-v+k+1$ systèmes de racines indépendants entre eux. Il existe déjà pour les $v-k-1$ équations θ choisies v_2 systèmes de racines qui satisfont à toutes les équations θ . Il reste encore $v_1-v+k+1-v_2$ ou $k+1-lm$ systèmes qui doivent satisfaire aux $v-k-1$ équations θ choisies et non à toutes les autres.

§ 12. On évalue un pareil système de valeurs s' , en égalant à zéro v_2+k-lm des indéterminées s ; les $v_1-(v_2+k-lm)$ ou $v-k$ indéterminées restantes s'obtiennent par la résolution des $v-k-1$ équations linéaires homogènes choisies. De cette manière on obtient les autres grandeurs s dans la forme de déterminants du degré $v-k-1$.

Ensuite, on doit substituer les valeurs trouvées dans toutes les autres fonctions θ pour obtenir les coefficients de l'équation à deux variables.

Cette substitution s'effectue aisément. Il s'agit d'évaluer les valeurs des variables de $n-1$ équations linéaires homogènes à n variables et de substituer les valeurs trouvées dans une fonction linéaire homogène des mêmes variables. Le résultat est, comme on sait, le déterminant formé des coefficients de la fonction donnée et de ceux des équations données. Dans le cas en question le résultat est donc un déterminant du degré $v-k$.

L'équation à deux variables ainsi obtenue est alors du degré k et ses coefficients sont des déterminants du degré $v-k$.

§ 13. Il est clair que l'équation trouvée sera l'équation finale, si l'on prend pour k la valeur la plus petite, c'est-à-dire lm .

Les coefficients de l'équation finale sont dans ce cas des déterminants du degré $v-lm$ ou $\binom{lm+2}{2}-lm$.

Comme il a été remarqué au § 9, tous les déterminants contenus dans l'assemblant qui fournit les coefficients de l'équation finale, sont divisibles par un même facteur du degré $v_2 = \binom{lm-l-m+2}{2}$.

Ce facteur est un déterminant de l'assemblant des v_2 systèmes de racines s' qui satisfont à toutes les équations θ , car cet assemblant est supplémentaire à tout assemblant qu'on peut former avec $v-lm$ lignes quelconques de l'assemblant de la fonction F .

Nous avons déjà vu (§ 1) que le degré des coefficients de l'équation finale doit se réduire à $l+m$. Les coefficients de l'équation trouvée doivent donc être divisibles par un commun

facteur du degré $\binom{l+m+2}{2} - l - m$. La méthode qui nous fera obtenir ce commun facteur sera exposée dans la suite de ce chapitre (§ 19 et suivants).

§ 14. La méthode par laquelle nous avons obtenu l'équation finale, permet aussi de former des équations qui nous donnent immédiatement la valeur de la troisième variable, quand on a évalué les deux autres.

Nous appellerons une équation de cette espèce *équation terminale*.

Les équations terminales s'obtiennent en faisant disparaître de la fonction F l'un des termes qui renferme seulement les deux variables trouvées, et tous les termes qui ont pour facteur la troisième variable, excepté l'un d'eux qui a cette variable au premier degré; ou bien, en faisant disparaître de la fonction F tous les termes qui ont pour facteur la troisième variable à un degré plus élevé que le premier et autant des autres termes que $k+1$ termes restent.

Les $v-k-1$ coefficients des termes qui doivent disparaître, égalés à zéro, forment $v-k-1$ équations θ , d'où l'on peut résoudre les grandeurs s .

En substituant ces valeurs dans les autres coefficients on obtient une équation entre les trois variables x, y, z , et les coefficients des équations (1), où l'une de ces variables ne se présente qu'au premier degré.

De la même manière on peut obtenir une équation entre $k+1$ arguments quelconques de la fonction F . Le nombre total des **équations résultantes** ainsi obtenues est $\binom{v}{k+1}$.

§ 15. Appliquons les théories précédentes à quelques exemples, et posons $k = lm$.

Remarquons d'abord qu'on n'a pas besoin de s'occuper des valeurs de k supérieures à lm . Les résultats que l'on obtiendrait ainsi, seraient en général plus compliqués, et ne différeraient des résultats que l'on obtient pour $k = lm$ que par des facteurs superflus.

Nous ne mentionnerons pas dans les exemples la marche suivie pour obtenir les résultats. Qu'il suffise de faire connaître les assemblants dont nous nous sommes servis, les équations finales et les équations qui nous donnent la troisième variable.

Les coefficients de ces équations sont des déterminants contenus dans un assemblant suffisamment indiqué. Nous emploierons pour ces déterminants des lettres munies d'indices, qui indiquent les lignes qu'il faut supprimer de cet assemblant pour obtenir le déterminant proposé.

§ 16. Exemples:

1. Deux équations du premier degré:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + a_2 y + a_3 z &= 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14).$$

	s_1	s_2	
$p_1 = x$	a_1	b_1	
$p_2 = y$	a_2	b_2	$\dots\dots\dots$
$p_3 = z$	a_3	b_3	

(15).

Les équations finales:

$$\left. \begin{aligned} p_3 y + p_2 z &= 0, \\ p_3 x - p_1 z &= 0, \\ p_2 x + p_1 y &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16).$$

2. Une équation du second et l'autre du premier degré:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17).$$

	s_1	s_2	s_3	s_4	
$p_1 = x^2$	a_1	b_1			
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1		
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1	$\dots\dots\dots$
$p_4 = y^2$	a_4	b_2			
$p_5 = yz$	a_5	b_3	b_2		
$p_6 = z^2$	a_6		b_3		

(18).

Les équations finales et quelques équations terminales:

$$\left. \begin{aligned} p_{5,6} y^2 + p_{4,6} yz + p_{4,5} z^2 &= 0, \\ -p_{3,6} x^2 + p_{4,6} xz + p_{1,3} z^2 &= 0, \\ p_{2,4} x^2 + p_{1,4} xy - p_{1,2} y^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19),$$

$$\left. \begin{aligned} -p_{5,6} x + p_{3,6} y + p_{3,5} z &= 0, \\ p_{2,3} x + p_{1,3} y + p_{1,2} z &= 0, \\ -p_{4,5} x + p_{2,5} y + p_{2,4} z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20),$$

$$\left. \begin{aligned} p_{3,4} xy + p_{2,4} xz + p_{2,3} y^2 &= 0, \\ p_{3,5} xy + p_{2,5} xz - p_{2,3} yz &= 0, \\ p_{3,6} xy + p_{2,6} xz + p_{2,3} z^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21).$$

3. Deux équations du second degré:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 xz + b_4 y^2 + b_5 yz + b_6 z^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots (22).$$

L'assemblant de la fonction F et l'assemblant des systèmes de racines s' :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
$p_1 = x^4$	a_1						b_1						
$p_2 = x^3 y$	a_2	a_1					b_2	b_1					
$p_3 = x^3 z$	a_3		a_1				b_3		b_1				
$p_4 = x^2 y^2$	a_4	a_2		a_1			b_4	b_2		b_1			
$p_5 = x^2 y z$	a_5	a_3	a_2		a_1		b_5	b_3	b_2		b_1		
$p_6 = x^2 z^2$	a_6		a_3			a_1	b_6		b_3			b_1	
$p_7 = x y^3$		a_4		a_2				b_4		b_2			
$p_8 = x y^2 z$		a_5	a_4	a_3	a_2			b_5	b_4	b_3	b_2		
$p_9 = x y z^2$		a_6	a_5		a_3	a_2		b_6	b_5		b_3	b_2	
$p_{10} = x z^3$			a_6			a_3			b_6			b_3	
$p_{11} = y^4$				a_4						b_4			
$p_{12} = y^3 z$				a_5	a_4					b_5	b_4		
$p_{13} = y^2 z^2$				a_6	a_5	a_4				b_6	b_5	b_4	
$p_{14} = y z^3$					a_6	a_5					b_6	b_5	
$p_{15} = z^4$						a_6						b_6	

..... (23),

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
t_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$b_6 - a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$	 (24).

L'équation finale entre y et z , et une équation terminale pour l'évaluation de x :

$$\left. \begin{aligned} & p_{12,13,14,15} y^4 + p_{11,13,14,15} y^3 z + p_{11,12,14,15} y^2 z^2 \\ & \quad + p_{11,12,13,15} y z^3 + p_{11,12,13,14} z^4 = 0, \\ - & p_{12,13,14,15} x z^2 + p_{10,13,14,15} y^3 + p_{10,12,14,15} y^2 z \\ & \quad + p_{10,12,13,15} y z^2 + p_{10,12,13,14} z^3 = 0, \end{aligned} \right\} \dots (25).$$

L'équation finale entre x et z , et une équation terminale pour l'évaluation de y :

$$\left. \begin{aligned} & p_{3,6,10,15} x^4 - p_{1,6,10,15} x^3 z - p_{1,3,10,15} x^2 z^2 \\ & \quad + p_{1,3,6,15} x z^3 + p_{1,3,6,10} z^4 = 0, \\ - & p_{3,6,10,15} x^2 y + p_{5,6,10,15} x^3 - p_{3,5,10,15} x^2 z \\ & \quad + p_{3,5,6,15} x z^2 + p_{3,5,6,10} z^3 = 0, \end{aligned} \right\} \dots (26).$$

L'équation finale entre x et y , et une équation terminale pour l'évaluation de z :

$$\left. \begin{aligned} & p_{2,4,7,11} x^4 + p_{1,4,7,11} x^3 y - p_{1,2,7,11} x^2 y^2 - p_{1,2,4,11} x y^3 \\ & \quad + p_{1,2,4,7} y^4 = 0, \\ & p_{2,4,7,11} x^2 z - p_{4,5,7,11} x^3 + p_{2,5,7,11} x^2 y - p_{2,4,5,11} x y^2 \\ & \quad + p_{2,4,5,7} y^3 = 0, \end{aligned} \right\} \dots (27).$$

Les coefficients des équations (25), (26), (27) sont des déterminants empruntés à l'assemblant (23), après la suppression d'une des colonnes. Tous les déterminants de cet assemblant sont encore divisibles par le déterminant supplémentaire de l'assemblant (24), c'est-à-dire par b_6 , après suppression de la sixième colonne dans l'assemblant (23).

Voici encore quelques exemples d'équations terminales contenant plus d'un terme qui renferme la variable cherchée:

$$\left. \begin{aligned} & p_{9,10,11,12} x y^2 z + p_{8,10,11,12} x y z^2 + p_{8,9,11,12} x z^3 \\ & \quad + p_{8,9,10,12} y^4 + p_{8,9,10,11} y^3 z = 0, \\ - & p_{9,13,14,15} x y^2 z - p_{8,13,14,15} x y z^2 + p_{8,9,14,15} y^2 z^2 \\ & \quad + p_{8,9,13,15} y z^3 + p_{8,9,13,14} z^4 = 0, \\ & p_{8,9,10,11} x y^3 + p_{7,9,10,11} x y^2 z + p_{7,8,10,11} x y z^2 \\ & \quad + p_{7,8,9,11} x z^3 + p_{7,8,9,10} y^4 = 0, \end{aligned} \right\} \dots (28).$$

DEUXIÈME MÉTHODE, PAR LAQUELLE ON OBTIENT LES MÊMES RÉSULTATS.

§ 17, Comme il a été remarqué au § 8, les v équations θ sont liées par lm relations linéaires indépendantes, quel que soit le degré de la fonction F . Pour les équations ζ il existe donc lm systèmes de racines p' indépendants. Il est clair qu'un ou plusieurs des systèmes de racines p' doivent avoir la propriété que leurs éléments sont proportionnels aux arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré k à trois variables.

Pour trouver un tel système de racines, formons lm systèmes de racines p' indépendants dont $lm - 1$ éléments correspondant aux termes de la fonction F qui ne renferment que deux des variables, sont des zéros. De ces lm systèmes de racines p' on déduira un autre système dont aucun élément ne s'annule, en les multipliant respectivement par les coefficients indéterminés q_1, q_2, \dots, q_{lm} , et en ajoutant les produits. Les sommes ainsi obtenues forment un système de racines pour les équations ζ satisfaisant à la condition citée.

En divisant ces racines respectivement par les arguments consécutifs d'une fonction homogène du degré k à trois variables, on obtient l'égalité de v proportions, d'où l'on peut éliminer les lm quantités q . Cette élimination pourra se faire de $\binom{v}{lm+1}$ manières, c'est-à-dire d'autant de manières qu'il y a de combinaisons, $lm+1$ à $lm+1$, de v éléments.

En effet, $lm+1$ membres de cette égalité forment lm équations linéaires homogènes entre les lm arbitraires q . L'élimination de ces arbitraires fournit une relation entre les variables x, y, z et les coefficients des équations (1).

Pour obtenir une relation ne renfermant que deux variables, il suffit de prendre de la susdite égalité $lm+1$ membres qui contiennent seulement deux des trois variables x, y, z . Comme dans une fonction homogène du degré k à trois variables le nombre des termes qui contiennent seulement deux quelconques de ces variables, est $k+1$, il faut que $k+1$ ne soit pas inférieur à $lm+1$.

Ainsi cette méthode, comme la première, donne lm pour la plus petite valeur de k . Pour cette valeur la relation trouvée est l'équation finale.

De la même manière on peut obtenir des équations terminales pour l'évaluation de la troisième variable, comme on le verra dans les exemples suivants.

§ 18. Appliquons la théorie générale du paragraphe précédent, en prenant en premier lieu l'exemple de deux équations homogènes (17) dont l'une est du second et l'autre du premier degré.

Les deux systèmes de racines p' indépendants contenus dans les lignes de l'assemblant

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
q_1	$p_{1,6}$	$-p_{2,6}$	$p_{3,6}$	$-p_{4,6}$	$p_{5,6}$	0 (29),
q_2	$-p_{1,5}$	$p_{2,5}$	$-p_{3,5}$	$p_{4,5}$	0	$-p_{5,6}$	

nous mèneront à l'équation finale entre y et z .

De la manière connue on obtient de cet assemblant l'égalité:

$$\frac{q_1 p_{1,6} - q_2 p_{1,5}}{x^2} = \frac{-q_1 p_{2,6} + q_2 p_{2,5}}{xy} = \frac{q_1 p_{3,6} - q_2 p_{3,5}}{xz} =$$

$$\frac{-q_1 p_{4,6} + q_2 p_{4,5}}{y^2} = \frac{q_1 p_{5,6}}{yz} = \frac{-q_2 p_{5,6}}{z^2} \dots\dots\dots (30).$$

Des deux derniers membres de cette égalité on déduit

$$\frac{q_1}{y} = \frac{-q_2}{z} \dots\dots\dots (31),$$

par laquelle l'égalité (30) se réduit à

$$\frac{p_{1,6}y + p_{1,5}z}{x^2} = \frac{-p_{2,6}y - p_{2,5}z}{xy} = \frac{p_{3,6}y + p_{3,5}z}{xz} =$$

$$\frac{-p_{4,6}y - p_{4,5}z}{y^2} = \frac{p_{5,6}}{z} \dots\dots\dots (32).$$

Les deux derniers membres de l'égalité (32) donnent l'équation finale entre y et z :

$$p_{5,6}y^2 + p_{4,6}yz + p_{4,5}z^2 = 0 \dots\dots\dots (33),$$

tandis que le dernier membre et l'antépénultième fournissent l'équation pour l'évaluation de x :

$$-p_{3,6}x + p_{3,6}y + p_{3,5}z = 0 \dots\dots\dots (34).$$

De la même manière on déduit de l'assemblant

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
q_1	0	$-p_{1,2}$	$p_{1,3}$	$-p_{1,4}$	$p_{1,5}$	$-p_{1,6}$	$\dots\dots\dots (35)$
q_2	$-p_{1,3}$	$p_{2,3}$	0	$-p_{3,4}$	$p_{3,5}$	$-p_{3,6}$	

les équations:

$$\left. \begin{aligned} -p_{3,6}x^2 + p_{1,6}xz + p_{1,3}z^2 &= 0, \\ p_{2,3}x + p_{1,3}y + p_{1,2}z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36),$$

et de l'assemblant

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
q_1	$p_{1,4}$	$-p_{2,4}$	$p_{3,4}$	0	$-p_{4,5}$	$p_{4,6}$	$\dots\dots\dots (37)$
q_2	$-p_{1,2}$	0	$p_{2,3}$	$-p_{2,4}$	$p_{2,5}$	$-p_{2,6}$	

les équations:

$$\left. \begin{aligned} p_{2,4}x^2 + p_{1,4}xy - p_{1,2}y^2 &= 0, \\ -p_{4,5}x + p_{2,5}y + p_{2,4}z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38).$$

Les équations (33), (34), (36), (38) sont alors les mêmes que les équations (19), (20).

Pour deuxième exemple nous déterminerons l'équation finale entre y et z par rapport à deux équations homogènes du second degré à trois variables (22).

Les 12 équations ζ sont dans ce cas liées par une seule relation linéaire. De 11 équations ζ indépendantes on peut déduire les quatre systèmes de racines p' indépendants entre eux contenus dans les lignes de l'assemblant

	p_1	$\cdot \cdot \cdot p_{10}$	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	
q_1	$p_{1,13,14,15}$	$\cdot \cdot \cdot -p_{10,13,14,15}$	$p_{11,13,14,15}$	$-p_{12,13,14,15}$	o	o	o	
q_2	$-p_{1,12,14,15}$	$\cdot \cdot \cdot p_{10,12,14,15}$	$-p_{11,12,14,15}$	o	$p_{12,13,14,15}$	o	o	(39).
q_3	$p_{1,12,13,15}$	$\cdot \cdot \cdot -p_{10,12,13,15}$	$p_{11,12,13,15}$	o	o	$-p_{12,13,14,15}$	o	
q_4	$-p_{1,12,13,14}$	$\cdot \cdot \cdot p_{10,12,13,14}$	$-p_{11,12,13,14}$	o	o	o	$p_{12,13,14,15}$	

Par le procédé déjà connu on obtient facilement de cet assemblant les équations:

$$\left. \begin{aligned} & p_{12,13,14,15}y^4 + p_{11,13,14,15}y^3z + p_{11,12,14,15}y^2z^2 \\ & \quad + p_{11,12,13,15}yz^3 + p_{11,12,13,14}z^4 = o, \\ -p_{12,13,14,15}xz^2 + p_{10,13,14,15}y^3 + p_{10,12,14,15}y^2z \\ & \quad + p_{10,12,13,15}yz^2 + p_{10,12,13,14}z^3 = o, \end{aligned} \right\} \dots (40),$$

qui sont les mêmes que les équations (25).

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COEFFICIENTS DES ÉQUATIONS FINALES.

§ 19. Il importe de mentionner quelques propriétés remarquables des déterminants contenus dans l'assemblant qui fournit les coefficients des équations finales.

Le nombre total de ces déterminants est $\binom{v}{lm}$, c'est-à-dire le nombre des combinaisons, lm à lm , de v éléments. Prenant $k = lm$, on peut écrire ce nombre de la manière suivante:

$$\left(\binom{lm+2}{2}_{lm} \right) \dots \dots \dots (41).$$

Les propriétés que nous voulons signaler, sont les suivantes:

1. Parmi les déterminants contenus dans l'assemblant qui fournit les coefficients de l'équation finale, on peut choisir de trois manières un nombre de $\left(\binom{lm+1}{2}_{lm} \right)$ déterminants tous divisibles

par un même facteur du degré $l + m$, et formant ainsi trois groupes de déterminants.

2. Les déterminants du premier groupe sont divisibles par le résultant des équations à deux variables que l'on obtient en posant x égal à zéro dans les deux équations données; ceux du deuxième groupe par le résultant des équations à deux variables que l'on obtient en posant y égal à zéro dans les deux équations données, ceux du troisième groupe par le résultant des équations à deux variables que l'on obtient en posant z égal à zéro dans les deux équations données.

3. On peut ranger les déterminants des trois susdits groupes de manière que les termes correspondants sont divisibles par un même facteur du degré $v - lm - l - m$, y compris le facteur commun à tous les déterminants de l'assemblant considéré.

4. Tous les coefficients d'une même équation finale sont divisibles par un commun facteur du degré $v - lm - l - m$, de sorte que ces coefficients peuvent se réduire à des formes du degré $l + m$.

§ 20. Pour démontrer ces propriétés, prenons, outre les deux équations homogènes données, l'équation générale du premier degré à coefficients indéterminés, c'est-à-dire l'équation:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \dots\dots\dots (42).$$

On obtiendra ainsi un système de trois équations homogènes à trois variables dont on déterminera le résultant.

Prenons à cet effet, pour le degré de la fonction F la valeur lm , alors on obtiendra un assemblant dont les $\alpha_1 + \alpha_2$ premières colonnes forment l'assemblant appartenant au système des deux équations homogènes données. Le résultant des trois susdites équations s'exprime, comme on sait, par la formule:

$$R = \frac{D_v}{D_{v_2-v_3} : D_{v_3}} \dots\dots\dots (43),$$

dans laquelle les symboles ont la signification connue ¹⁾.

En posant successivement dans cette formule

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \\ 2. \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \\ 3. \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \end{array} \right\} \dots\dots\dots (44),$$

¹⁾ Voir: Théorie générale de l'élimination, § 97.

le numérateur de la fraction (43) peut se réduire à un déterminant contenu dans l'assemblant qui fournit les coefficients des équations finales des deux équations données, et le dénominateur à une forme du degré $v - l - m$.

Pour $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$, le premier membre de l'équation (43) se réduit au résultant des deux équations à deux variables que l'on obtient en posant x égal à zéro dans les équations données.

Pour $c_2 = 1$, $c_1 = c_3 = 0$, le premier membre de l'équation (43) se réduit au résultant des deux équations à deux variables que l'on obtient en posant y égal à zéro dans les équations données.

Pour $c_3 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$, le premier membre de l'équation (43) se réduit au résultant des deux équations à deux variables que l'on obtient en posant z égal à zéro dans les équations données.

Représentant le numérateur de la fraction (43) par P et le dénominateur par Q , on peut écrire l'équation (43) dans la forme

$$P = R Q \dots\dots\dots (45),$$

dans laquelle R est du degré $l + m$ et Q du degré $v - l - m$.

Dans cette formule, R peut avoir les trois valeurs distinctes déjà citées. Pour chaque valeur de R , on peut trouver différentes valeurs pour Q .

Afin d'évaluer le nombre de ces valeurs, il est nécessaire de relever les valeurs v qui se présentent à la détermination du résultant de trois équations homogènes à trois variables respectivement des degrés l , m et 1.

Ces valeurs v sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \binom{k+2}{2}, \\ v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \alpha_1 &= \frac{(k-l+1)(k-l+2)}{2} = \binom{k-l+2}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{(k-m+1)(k-m+2)}{2} = \binom{k-m+2}{2}, \\ \alpha_3 &= \frac{k(k+1)}{2} = \binom{k+1}{2}, \\ v_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{aligned} \right\} \dots (46).$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{(k-m)(k-m+1)}{2} = \binom{k-m+1}{2}, \\ \beta_2 &= \frac{(k-l)(k-l+1)}{2} = \binom{k-l+1}{2}, \\ \beta_3 &= \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)}{2} = \binom{k-l-m+2}{2}, \\ v_3 &= \frac{(k-l-m)(k-l-m+1)}{2} = \binom{k-l-m+1}{2}, \end{aligned} \right\} \dots (46).$$

Dans le cas en question on a $k = lm$. Le nombre des valeurs qu'on peut donner à Q dans l'équation (45), est alors $\binom{\alpha_3}{lm}$ ou $\binom{\binom{lm+1}{2}}{lm}$, c'est-à-dire le nombre des combinaisons, lm à lm , de α_3 éléments.

Ces valeurs de Q sont les mêmes pour chacune des trois valeurs de R , de sorte que chaque valeur de Q fournit trois déterminants P , ce qui se voit en considérant les assemblants qui fournissent le résultant des trois équations homogènes dont nous nous sommes occupés dans ce paragraphe.

§ 21. Afin de démontrer que tous les coefficients d'une équation finale sont divisibles par un même facteur du degré $v - lm - l - m$, nous constituons les assemblants qui fournissent le résultant des deux équations données et de l'équation linéaire (42) aux coefficients indéterminés c .

Dans les $lm + 1$ lignes de l'assemblant de la fonction F qui correspondent aux différents termes de l'équation finale qui nous occupe, on trouve les coefficients c à l'exception de l'un d'entre eux lm fois, placés en lm colonnes de cet assemblant. Exprimons le résultant des trois susdites équations de telle manière que le numérateur D_v de la fraction (43) contienne ces lm colonnes, tandis que les autres colonnes dans lesquelles les coefficients c se trouvent, ont été supprimées.

Le déterminant D_v ainsi obtenu est divisible par un facteur du degré $v_2 - 2v_3 = v - lm - l - m$. Ce facteur reste le même quelles que soient les valeurs données aux coefficients indéterminés c_1, c_2, c_3 .

Egalant à zéro le coefficient lequel correspond à la variable qui n'entre pas dans l'équation finale, le déterminant D_v peut se développer suivant les puissances ascendantes et descendantes des

deux autres coefficients c . Comme D_v est divisible par un facteur du degré $v - lm - l - m$ quelles que soient les valeurs des deux coefficients c restants, tous les coefficients de ce développement sont divisibles par ce facteur.

On remarquera que les coefficients de ce développement sont, au signe $+$ ou $-$ près, identiques aux coefficients de l'équation finale considérée.

Tous les coefficients d'une équation finale sont donc divisibles par ce facteur du degré $v - lm - l - m$. Les divisions faites, ces coefficients se réduisent aux formes du degré $l + m$, ce qui s'accorde avec la théorie du § 1.

§ 22. Pour éclaircir ce qui a été dit dans les deux paragraphes précédents, prenons en premier lieu pour exemple les deux équations homogènes (17) à trois variables, dont l'une est du second et l'autre du premier degré.

Le résultant de ces deux équations et de l'équation homogène (42) à coefficients indéterminés s'obtient de la manière connue des deux assemblants suivants:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
$p_1 = x^2$	a_1	b_1			c_1			
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1		c_2	c_1		
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1	c_3		c_1 (47),
$p_4 = y^2$	a_4		b_2			c_2		
$p_5 = yz$	a_5		b_3	b_2		c_3	c_2	
$p_6 = z^2$	a_6			b_3			c_3	

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
l_1		c_1	c_2	c_3	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$ (48).

Nous écrivons le résultant des trois manières suivantes:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ a_2 & b_2 & b_1 & & c_1 \\ a_3 & b_3 & & b_1 & c_1 \\ a_4 & & b_2 & & c_2 \\ a_5 & & b_3 & b_2 & c_3 & c_2 \\ a_6 & & & b_3 & & c_3 \end{vmatrix} : - b_1 \dots \dots \dots (49),$$

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & c_1 \\ a_2 & b_2 & b_1 & & c_2 \\ a_3 & b_3 & & b_1 & c_3 & c_1 \\ a_4 & & b_2 & & & \\ a_5 & & b_3 & b_2 & & c_2 \\ a_6 & & & b_3 & & c_3 \end{vmatrix} : b_2 \dots \dots \dots (50),$$

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & c_1 \\ a_2 & b_2 & b_1 & & c_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & & b_1 & c_3 \\ a_4 & & b_2 & & & c_2 \\ a_5 & & b_3 & b_2 & & c_3 \\ a_6 & & & b_3 & & \end{vmatrix} : - b_3 \dots \dots \dots (51).$$

En posant successivement dans ces trois formes les valeurs (44), on démontre que

$$\begin{array}{llll} p_{2,3} & , & p_{4,5} & , & p_{5,6} & \text{sont divisibles par } b_1 & , \\ p_{1,3} & , & p_{2,5} & , & p_{3,6} & \text{,, ,, ,, } b_2 & , \\ p_{1,2} & , & p_{2,4} & , & p_{3,5} & \text{,, ,, ,, } b_3 & . \end{array}$$

Le résultant peut s'exprimer encore des trois manières suivantes :

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & b_1 & c_2 & c_1 & \\ a_3 & b_3 & & c_3 & & c_1 \\ a_4 & & b_2 & & c_2 & \\ a_5 & & b_3 & & c_3 & c_2 \\ a_6 & & & & & c_3 \end{vmatrix} : - c_3 \dots\dots\dots (52),$$

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & c_1 & & \\ a_2 & b_2 & & c_2 & c_1 & \\ a_3 & b_3 & b_1 & c_3 & & c_1 \\ a_4 & & & & c_2 & \\ a_5 & & b_2 & & c_3 & c_2 \\ a_6 & & b_3 & & & c_3 \end{vmatrix} : c_2 \dots\dots\dots (53),$$

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & & & c_1 & & \\ a_2 & b_1 & & c_2 & c_1 & \\ a_3 & & b_1 & c_3 & & c_1 \\ a_4 & b_2 & & & c_2 & \\ a_5 & b_3 & b_2 & & c_3 & c_2 \\ a_6 & & b_3 & & & c_3 \end{vmatrix} : - c_1 \dots\dots\dots (54).$$

En posant dans la formule (52) $c_3 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$,

„ „ „ (53) $c_2 = 1$, $c_1 = c_3 = 0$,

„ „ „ (54) $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = 0$,

on trouve respectivement

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ a_2 & b_2 & b_1 & \\ a_4 & & b_2 & \end{vmatrix} \dots\dots\dots (55),$$

le résultant des équations:

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_4 y^2 &= 0, \\ b_1 x + b_2 y &= 0, \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (56),$$

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 & b_1 \\ a_6 & & b_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (57),$$

le résultant des équations:

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + a_3 xz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_1 x + b_3 z &= 0, \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (58),$$

$$R = \begin{vmatrix} a_4 & b_2 \\ a_5 & b_3 & b_2 \\ a_6 & & b_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (59),$$

le résultant des équations

$$\begin{aligned} a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_2 y + b_3 z &= 0, \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (60).$$

On en conclut que $p_{3,6}, p_{3,6}, p_{3,5}$ sont divisibles par le résultant des équations (56), que $p_{4,5}, p_{2,5}, p_{2,4}$ sont divisibles par le résultant des équations (58), que $p_{2,3}, p_{1,3}, p_{1,2}$ sont divisibles par le résultant des équations (60).

Si l'on fait ces divisions, les équations (20) se réduisent toutes à la deuxième des équations (17), comme on pouvait s'y attendre.

Posant dans l'équation (49) $c_1 = 0$, cette équation peut s'écrire

$$-b_1 R = p_{4,5} c_2^2 - p_{4,6} c_2 c_3 + p_{5,6} c_3^2 \dots\dots\dots (61),$$

d'où l'on déduit que $p_{4,5}, p_{4,6}, p_{5,6}$ (les coefficients de l'équation finale entre y et z) sont tous divisibles par b_1 .

Posant dans l'équation (50) $c_2 = 0$, on obtient en développant

$$b_2 R = -p_{1,3} c_1^2 + p_{1,6} c_1 c_3 + p_{3,6} c_3^2 \dots\dots\dots (62),$$

d'où l'on déduit que $p_{1,3}, p_{1,6}, p_{3,6}$ (les coefficients de l'équation finale entre x et z) sont tous divisibles par b_2 .

De la même manière on obtient de l'équation (51) en posant $c_3 = 0$

$$-b_3 R = p_{1,2} c_1^2 + p_{1,4} c_1 c_2 - p_{2,4} c_2^2 \dots\dots\dots (63),$$

d'où l'on déduit que $p_{1,2}, p_{1,4}, p_{2,4}$ (les coefficients de l'équation finale entre x et y) sont tous divisibles par b_3 .

Si l'on divise les coefficients des équations finales (19) par leur commun diviseur, ils se réduisent à des formes du troisième degré, ce qui s'accorde avec la théorie du § 1.

Remarque. Si l'on avait choisi pour le degré de la fonction F une valeur k supérieure à lm , on aurait obtenu pour résultat différentes équations du degré k entre les deux variables restantes. Les coefficients de ces équations du degré $v_1 - v_2 = v - lm$, tous divisibles par une forme du degré $v'_2 = v - lm - l - m$, pourraient se réduire à des formes du degré $l + m$, tout comme dans le cas où l'on a choisi $k = lm$.

RÉSULTATS OBTENUS POUR DES VALEURS DU DEGRÉ DE LA FONCTION F INFÉRIEURES AU PRODUIT DES DEGRÉS DES DEUX ÉQUATIONS DONNÉES.

§ 23. La plus petite valeur qu'on puisse prendre pour le degré de la fonction F afin de déterminer le résultant de deux équations homogènes à deux variables respectivement des degrés l et m , est, comme on sait, $l + m - 1$. S'il s'agit de deux équations homogènes à trois variables, la même valeur du degré de la fonction F doit également suffire pour former l'équation finale de ces deux équations.

Prenant $k = l + m - 1$, et supposant que l'on ait

$$l + m - 1 < lm \dots\dots\dots (64),$$

on peut former $lm - l - m + 2$ équations terminales qui contiennent en tout $lm + 1$ arguments différents, dont $l + m$ ne renferment pas la troisième variable.

En éliminant entre ces équations les $lm - l - m + 1$ arguments qui renferment la troisième variable, on obtiendra une équation à deux variables. Si cette équation est du degré lm , on aura obtenu l'équation finale.

Les coefficients de l'équation trouvée sont des sommes de déterminants du degré $v - lm$ ou $\binom{l+m+1}{2} - lm$. Ces coefficients sont divisibles par un commun facteur du degré $\binom{l+m+1}{2} - lm - l - m$, ce qu'on peut démontrer de la même manière qu'au § 21.

§ 24. Appliquons cette théorie à l'exemple de deux équations homogènes du second degré (22) à trois variables.

Pour $k = l + m - 1 = 3$, on obtient dans ce cas l'assemblant suivant

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
$p_1 = x^3$	a_1			b_1			
$p_2 = x^2y$	a_2	a_1		b_2	b_1		
$p_3 = x^2z$	a_3		a_1	b_3		b_1	
$p_4 = xy^2$	a_4	a_2		b_4	b_2		
$p_5 = xyz$	a_5	a_3	a_2	b_5	b_3	b_2 (65),
$p_6 = xz^2$	a_6		a_3	b_6		b_3	
$p_7 = y^3$		a_4			b_4		
$p_8 = y^2z$		a_5	a_4		b_5	b_4	
$p_9 = yz^2$		a_6	a_5		b_6	b_5	
$p_{10} = z^3$			a_6			b_6	

d'où l'on peut déduire les deux équations terminales :

$$\left. \begin{aligned} p_{7,8,9,10}xz^2 + p_{6,8,9,10}y^3 + p_{6,7,9,10}y^2z + p_{6,7,8,10}yz^2 + p_{6,7,8,9}z^3 &= 0, \\ -p_{7,8,9,10}xyz + p_{5,8,9,10}y^3 + p_{5,7,9,10}y^2z + p_{5,7,8,10}yz^2 + p_{5,7,8,9}z^3 &= 0, \end{aligned} \right\} (66).$$

Multipliant les deux équations (66) respectivement par y et z et ajoutant, on obtient l'équation finale entre y et z :

$$\begin{aligned} p_{6,8,9,10}y^4 + (p_{6,7,9,10} + p_{5,8,9,10})y^3z + (p_{6,7,8,10} + p_{5,7,9,10})y^2z^2 \\ + (p_{6,7,8,9} + p_{5,7,8,10})yz^3 + p_{5,7,8,9}z^4 = 0 \quad \dots\dots\dots (67). \end{aligned}$$

Les coefficients de cette équation, qui sont du sixième degré, sont tous divisibles par le facteur du deuxième degré

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Pour le démontrer, nous déterminons le résultant des équations données (22) et de l'équation du premier degré à coefficients indéterminés (42). Ce résultant s'obtient des deux assemblants suivants:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
$p_1 = x^3$	a_1			b_1			c_1						
$p_2 = x^2y$	a_2	a_1		b_2	b_1		c_2	c_1					
$p_3 = x^2z$	a_3		a_1	b_3		b_1	c_3		c_1				
$p_4 = xy^2$	a_4	a_2		b_4	b_2			c_2		c_1			
$p_5 = xyz$	a_5	a_3	a_2	b_5	b_3	b_2		c_3	c_2		c_1		...
$p_6 = xz^2$	a_6		a_3	b_6		b_3			c_3			c_1	(68),
$p_7 = y^3$		a_4			b_4					c_2			
$p_8 = y^2z$		a_5	a_4		b_5	b_4			c_3	c_2			
$p_9 = yz^2$		a_6	a_5		b_6	b_5					c_3	c_2	
$p_{10} = z^3$			a_6			b_6						c_3	

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
t_1	c_1	c_2	c_3				$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$...
t_2				$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	(69),

dans la forme

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & & & b_1 & & & & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & b_2 & b_1 & & & & & & & & \\ a_3 & & a_1 & b_3 & & b_1 & c_1 & & & & & & \\ a_4 & a_2 & & b_4 & b_2 & & & c_1 & & & & & \\ a_5 & a_3 & a_2 & b_5 & b_3 & b_2 & c_2 & & c_1 & & & & \\ a_6 & & a_3 & b_6 & & b_3 & c_3 & & & c_1 & & & \\ & a_4 & & & b_4 & & & c_2 & & & & & \\ & a_5 & a_4 & & b_5 & b_4 & & c_3 & c_2 & & & & \\ & a_6 & a_5 & & b_6 & b_5 & & & c_3 & c_2 & & & \\ & & a_6 & & & b_6 & & & & c_3 & & & \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \dots (70).$$

Posant dans l'équation (70) $c_1 = 0$, elle peut s'écrire :

$$-R \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = p_{5,7,8,9} c_2^4 - (p_{6,7,8,9} + p_{5,7,8,10}) c_2^3 c_3 + (p_{6,7,8,10} + p_{5,7,9,10}) c_2^2 c_3^2 - (p_{6,7,9,10} + p_{5,8,9,10}) c_2 c_3^3 + p_{6,8,9,10} c_3^4 \dots \dots (71).$$

Comme cette équation est vérifiée quelles que soient les valeurs de c_2 et c_3 , on trouve que $p_{6,8,9,10}, p_{6,7,9,10} + p_{5,8,9,10}, p_{6,7,8,10} + p_{5,7,9,10}, p_{6,7,8,9} + p_{5,7,8,10}, p_{5,7,8,9}$, les coefficients de l'équation finale (67), sont

$$\text{tous divisibles par } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} . \quad C. Q. F. D.$$

Après division par ce facteur les coefficients de l'équation finale (67) se réduisent à des formes du quatrième degré, ce qui s'accorde avec la théorie du § 1.

§ 25. Appliquant la méthode du § 23 au cas de deux équations homogènes à trois variables dont l'une est du troisième et l'autre du second degré, on obtient les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} k &= l + m - 1 = 4, \\ v &= \frac{6.5}{1.2} = 15, \\ v_1 &= \frac{3.2}{1.2} + \frac{4.3}{1.2} = 9, \\ v_2 &= \frac{1.0}{1.2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (72).$$

Les équations terminales que l'on peut former à l'aide de l'assemblant de la fonction F' contiennent la troisième variable au moins dans deux termes. En éliminant entre trois de ces équations la troisième variable — ce qui peut se faire sans difficulté en multipliant ces équations par les facteurs propres et en les ajoutant — on obtient l'équation finale.

Les coefficients de cette équation sont tous divisibles par un facteur du quatrième degré, comme on peut déduire des valeurs

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{6.5}{1.2} = 15, \\ v_1' &= \frac{3.2}{1.2} + \frac{4.3}{1.2} + \frac{5.4}{1.2} = 19, \\ v_2' &= \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2} + \frac{1.0}{1.2} = 4, \\ v_3' &= \frac{0.-1}{1.2} = 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (73),$$

qui se présentent à la détermination du résultant de trois équations homogènes à trois variables respectivement des degrés 3, 2, 1. En divisant par ce commun facteur les coefficients de l'équation finale se réduisent à des formes du cinquième degré, comme ce doit être le cas.

II. Elimination entre n équations homogènes à $n + 1$ variables.

EXTENSION DES THÉORIES DU CHAPITRE PRÉCÉDENT.

§ 26. Les méthodes qui mènent à l'équation finale exposées dans le chapitre précédent, sont encore applicables dans ce cas plus général.

Etant données trois équations homogènes à quatre variables

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z, u) &= 0, \\ \chi(x, y, z, u) &= 0, \\ \psi(x, y, z, u) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (74),$$

respectivement des degrés l, m, n , on peut former la fonction homogène du degré k :

$$F \equiv \Phi\varphi + X\chi + \Psi\psi \dots\dots\dots (75).$$

Cette fonction permet de former un assemblant qui contient v lignes et $v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ colonnes. Les colonnes de cet assemblant sont liées par $v_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ relations linéaires, qui sont à leur tour liées par v_3 relations linéaires indépendantes ¹⁾.

La démonstration de ces propriétés peut se faire de la même manière que nous avons démontré les propriétés correspondantes mentionnées dans les paragraphes 3—9.

Les valeurs v sont liées par la relation

$$v - v_1 + v_2 - v_3 = lmn \dots\dots\dots (76),$$

¹⁾ Comparer: Théorie générale de l'élimination, § 88—95.

qu'on démontre par la substitution des valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1.2.3} = \binom{k+3}{3}, \\
 v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\
 \alpha_1 &= \frac{(k-l+1)(k-l+2)(k-l+3)}{1.2.3} = \binom{k-l+3}{3}, \\
 \alpha_2 &= \frac{(k-m+1)(k-m+2)(k-m+3)}{1.2.3} = \binom{k-m+3}{3}, \\
 \alpha_3 &= \frac{(k-n+1)(k-n+2)(k-n+3)}{1.2.3} = \binom{k-n+3}{3}, \\
 v_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\
 \beta_1 &= \frac{(k-m-n+1)(k-m-n+2)(k-m-n+3)}{1.2.3} = \binom{k-m-n+3}{3}, \\
 \beta_2 &= \frac{(k-l-n+1)(k-l-n+2)(k-l-n+3)}{1.2.3} = \binom{k-l-n+3}{3}, \\
 \beta_3 &= \frac{(k-l-m+1)(k-l-m+2)(k-l-m+3)}{1.2.3} = \binom{k-l-m+3}{3}, \\
 v_3 &= \frac{(k-l-m-n+1)(k-l-m-n+2)(k-l-m-n+3)}{1.2.3} = \binom{k-l-m-n+3}{3},
 \end{aligned} \tag{77}$$

L'équation (76) nous montre que les lignes de l'assemblant de la fonction F sont liées par lmn relations linéaires indépendantes, d'où l'on déduit que la plus petite valeur qu'on puisse donner à k pour déterminer immédiatement l'équation à deux variables, est lmn .

Pour $k = lmn$, on obtient l'équation finale.

Les déterminants qui forment les coefficients de cette équation sont du degré $\binom{lmn+3}{3} - lmn$. Ces déterminants sont divisibles par un commun facteur du degré $\binom{lmn+3}{3} - lmn - mn - ln - lm$, tandis que tous les déterminants contenus dans l'assemblant qui fournit les coefficients des équations finales sont divisibles par un commun facteur du degré

$$\begin{aligned}
 v_2 - 2v_3 &= \binom{lmn+3}{3} - (mn + ln + lm)(lmn + 2) \\
 &+ \frac{(l+m+n)(mn + ln + lm) + lmn}{2} \dots \dots \dots (78).
 \end{aligned}$$

Du reste, l'application des méthodes exposées dans le chapitre précédent se fait de la même manière.

Les déterminants contenus dans l'assemblant qui fournit les coefficients des équations finales, ont les mêmes propriétés que celles traitées dans § 19. Parmi ces déterminants on peut choisir quatre groupes dont les déterminants sont divisibles par un même facteur du degré $mn + ln + lm$. Ce facteur est le résultant des équations à trois variables que l'on obtient en égalant à zéro l'une des variables dans les trois équations données. Les déterminants correspondants de ces quatre groupes sont divisibles par un commun facteur du degré $\binom{lmn+3}{3} - lmn - mn - ln - lm$, qu'on peut trouver de la même manière qu'au § 20. La démonstration de ces propriétés ne diffère pas de celle du paragraphe cité.

La fonction F qui se rapporte au résultant des trois équations données et de l'équation linéaire à coefficients indéterminés, conduit aux valeurs $v, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4$, de sorte que les coefficients de l'équation finale sont divisibles par un commun facteur du degré $v'_2 - 2v'_3 + 3v'_4$. Comme ces valeurs v' sont liées par les deux relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v - v'_1 + v'_2 - v'_3 + v'_4 &= 0, \\ v'_1 - 2v'_2 + 3v'_3 - 4v'_4 &= lmn + mn + ln + lm, \end{aligned} \right\} \dots (79),$$

on obtient pour le degré du facteur commun aux coefficients de l'équation finale :

$$\begin{aligned} v'_2 - 2v'_3 + 3v'_4 &= v - lmn - mn - ln - lm \\ &= \binom{lmn+3}{3} - lmn - mn - ln - lm \dots (80). \end{aligned}$$

§ 27. Prenons pour exemple les trois équations suivantes à quatre variables :

$$\left. \begin{aligned} a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4xu + a_5y^2 + a_6yz + a_7yu + a_8z^2 + a_9zu + a_{10}u^2 &= 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4u &= 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4u &= 0, \end{aligned} \right\} (81),$$

dont la première est du second et les deux autres du premier degré.

Pour obtenir les résultats les plus simples, on choisira les valeurs

$$\left. \begin{aligned}
 k &= lmn &= 2 &, \\
 v &= \binom{k+3}{3} &= \frac{5.4.3}{1.2.3} &= 10, \\
 v_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 + 4 + 4 = 9, \\
 v_2 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 + 0 + 0 = 1, \\
 v_3 &= \frac{1.0.-1}{1.2.3} &= 0 &,
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (82).$$

En formant les deux assemblants suivants:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	
$p_1 = x^2$	a_1	b_1				c_1				
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1			c_2	c_1			
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1		c_3		c_1		
$p_4 = xu$	a_4	b_4			b_1	c_4			c_1	
$p_5 = y^2$	a_5		b_2				c_2			$\dots\dots\dots(83),$
$p_6 = yz$	a_6		b_3	b_2			c_3	c_2		
$p_7 = yu$	a_7		b_4		b_2		c_4		c_2	
$p_8 = z^2$	a_8			b_3				c_3		
$p_9 = zu$	a_9			b_4	b_3			c_4	c_3	
$p_{10} = u^2$	a_{10}				b_4				c_4	

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	
t_1		c_1	c_2	c_3	c_4	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$	$\dots\dots\dots(84),$

on obtient immédiatement l'équation finale entre y et z et les équations terminales pour l'évaluation des deux autres variables:

$$\left. \begin{aligned}
 p_{9,10} z^2 + p_{8,10} zu + p_{8,9} u^2 &= 0, \\
 - p_{9,10} y + p_{7,10} z + p_{7,9} u &= 0, \\
 p_{9,10} x + p_{4,10} z + p_{4,9} u &= 0,
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (85).$$

De la même manière on peut obtenir les autres équations finales et plusieurs autres équations terminales.

Les coefficients des équations (85) sont des déterminants de l'assemblant (83), après la suppression d'une des colonnes à l'exception de la première. Tous ces déterminants sont divisibles par le déterminant supplémentaire de l'assemblant (84), c'est-à-dire par c_4 , après suppression de la cinquième colonne dans l'assemblant (83).

Pour obtenir les quatre groupes de déterminants dont le commun diviseur est le résultant des équations données après qu'on a égalé à zéro l'une des variables, prenons, outre les équations données, l'équation du premier degré à coefficients indéterminés :

$$d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 u = 0 \dots \dots \dots (86).$$

Le résultant de ces quatre équations s'obtient de la manière connue des deux assemblants suivants :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}
$p_1 = x^2$	a_1	b_1				c_1			d_1				
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1			c_2	c_1		d_2	d_1			
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1		c_3		c_1	d_3		d_1		
$p_4 = xu$	a_4	b_4			b_1	c_4			c_1	d_4			d_1
$p_5 = y^2$	a_5		b_2				c_2				d_2		
$p_6 = yz$	a_6		b_3	b_2			c_3	c_2			d_3	d_2	
$p_7 = yu$	a_7		b_4		b_2		c_4		c_2		d_4		d_2
$p_8 = z^2$	a_8			b_3				c_3				d_3	
$p_9 = zu$	a_9			b_4	b_3			c_4	c_3			d_4	d_3
$p_{10} = u^2$	a_{10}				b_4				c_4				d_4

(87),

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}
t_1		c_1	c_2	c_3	$c_4 - b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$					
t_2		d_1	d_2	d_3	d_4				$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$\dots \dots (88).$
t_3						$-d_1$	$-d_2$	$-d_3$	$-d_4$	b_1	b_2	b_3	b_4

Formons le système de 24 déterminants rangés dans la forme de rectangle de six lignes à quatre déterminants :

$p_{1,2}$	$p_{2,5}$	$p_{3,6}$	$p_{4,7}$	
$p_{1,3}$	$p_{2,6}$	$p_{3,8}$	$p_{4,9}$	
$p_{1,4}$	$p_{2,7}$	$p_{3,9}$	$p_{4,10}$ (89).
$p_{2,3}$	$p_{5,6}$	$p_{6,8}$	$p_{7,9}$	
$p_{2,4}$	$p_{3,7}$	$p_{6,9}$	$p_{7,10}$	
$p_{3,4}$	$p_{6,7}$	$p_{8,9}$	$p_{9,10}$	

En posant successivement dans les assemblants (87) et (88):

1. $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, $d_4 = 0$,

2. $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 0$, $d_4 = 0$,

3. $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$, $d_4 = 0$,

4. $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 0$, $d_4 = 1$,

}

..... (90) ,

on peut conclure que les déterminants d'une même ligne du système (89) sont divisibles par un commun facteur du troisième degré, tandis que les déterminants d'une même colonne sont divisibles par un commun facteur du cinquième degré, c'est-à-dire par le résultant des équations homogènes à trois variables que l'on obtient en égalant à zéro l'une des variables dans les trois équations données (81).

En considérant les deux assemblants (87) et (88) on trouve, comme au § 21, que les coefficients des équations finales suivantes:

$p_{9,10} z^2 + p_{8,10} zu + p_{8,9} u^2 = 0$,

$p_{7,10} y^2 + p_{5,10} yu + p_{5,7} u^2 = 0$,

$p_{4,10} x^2 + p_{1,10} xu - p_{1,4} u^2 = 0$,

$p_{6,10} y^2 + p_{5,8} yz - p_{5,6} z^2 = 0$,

$p_{3,8} x^2 + p_{1,8} xz + p_{1,3} z^2 = 0$,

$p_{2,5} x^2 + p_{1,5} xy + p_{1,2} y^2 = 0$,

}

..... (91)

sont respectivement divisibles par

$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

,

$\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$

,

$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

,

$\begin{vmatrix} c_1 & c_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}$

,

$\begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}$

,

$\begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$

.

Ces divisions faites, les coefficients de ces équations se réduisent

à des formes du cinquième degré, ce qui s'accorde avec la valeur $mn + ln + lm$.

§ 28. Il est aisé d'étendre la théorie d'élimination, comme elle a été traitée au § 26, à n équations homogènes à $n + 1$ variables:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ q_n = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (92).$$

En représentant les degrés des fonctions homogènes $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ par $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ et le degré de la fonction F par j , on obtient les valeurs:

$$\left. \begin{array}{l} v = \binom{j+n}{n} \\ v_1 = \sum_1^n \binom{j-g_1+n}{n} \\ v_2 = \sum_1^n \binom{j-g_1-g_2+n}{n} \\ \dots\dots\dots \\ v_n = \binom{j-g_1-g_2-\dots-g_n+n}{n} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (93).$$

Ces valeurs v sont liées par la relation

$$v - v_1 + v_2 - \dots + (-1)^n v_n = g_1 g_2 \dots g_n \dots\dots\dots (94),$$

comme il a été démontré dans la note 3 à la fin du mémoire „Théorie générale de l'élimination”.

La plus petite valeur qu'on puisse assigner à j est dans ce cas $g_1 g_2 \dots g_n$. C'est à la fois le degré de l'équation finale.

Les déterminants de l'assemblant qui fournit les coefficients des équations finales, sont du degré

$$v - g_1 g_2 \dots g_n \text{ ou } \binom{g_1 g_2 \dots g_n + n}{n} - g_1 g_2 \dots g_n.$$

Ces déterminants sont tous divisibles par un facteur du degré

$$v_2 - 2v_3 + 3v_4 - \dots + (-1)^n (n-1) v_n = \\ \left(g_1 g_2 \dots g_n + n \right) - g_1 g_2 \dots g_n [\Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1} - n + 1] \\ - \frac{1}{2} \{ (n+1) \Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1} - \Sigma g_1^2 g_2 \dots g_{n-1} \} \dots \dots \dots (95).$$

On peut obtenir cette valeur d'après une méthode conforme à celle de la note 3 qui se trouve à la fin de l'ouvrage que nous venons de citer.

L'assemblant qui fournit les coefficients des équations finales contient

en tout un nombre de $\left(\begin{matrix} (g_1 g_2 \dots g_n + n) \\ g_1 g_2 \dots g_n \end{matrix} \right)$ déterminants.

On peut choisir parmi ces déterminants $n + 1$ groupes de

$\left(\begin{matrix} (g_1 g_2 \dots g_n + n - 1) \\ g_1 g_2 \dots g_n \end{matrix} \right)$ déterminants, tels que les déterminants

d'un même groupe soient divisibles par le résultant des n équations données après avoir égalé à zéro l'une des variables.

Les déterminants correspondants de ces $n + 1$ groupes ont pour commun diviseur une forme du degré

$$\left(g_1 g_2 \dots g_n + n \right) - g_1 g_2 \dots g_n - \Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1}.$$

On peut démontrer ces faits en constituant les assemblants qui se présentent à la détermination du résultant des n équations homogènes données et de l'équation homogène du premier degré à coefficients indéterminés.

De ces assemblants on peut aussi déduire que les coefficients d'une équation finale sont divisibles par un commun facteur du degré $v'_2 - 2v'_3 + 3v'_4 - \dots + (-1)^{n+1} n v'_{n+1}$.

Les symboles v affectés d'accents sont ici les valeurs v qui se présentent à la détermination du résultant des susdites $n + 1$ équations.

Ces valeurs sont liées par les deux relations suivants :

$$\begin{aligned} v - v'_1 + v'_2 - v'_3 + \dots + (-1)^{n+1} v'_{n+1} &= 0, \\ v'_1 - 2v'_2 + 3v'_3 - \dots + (-1)^n (n+1) v'_{n+1} &= g_1 g_2 \dots g_n + \Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1}, \end{aligned} \quad \left\{ (96), \right.$$

d'où l'on déduit facilement la valeur

$$\begin{aligned} v'_2 - 2v'_3 + 3v'_4 - \dots + (-1)^{n+1} n v'_{n+1} &= \\ v - g_1 g_2 \dots g_n - \Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1} &= \left(g_1 g_2 \dots g_n + n \right) - g_1 g_2 \dots g_n - \Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1} \end{aligned} \quad \left\{ (97). \right.$$

En divisant les coefficients des équations finales par leur commun diviseur, ils se réduisent à des formes du degré $\Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1}$.

§ 29. En appliquant la théorie du paragraphe précédent aux trois équations homogènes à quatre variables :

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 xu + a_5 y^2 + a_6 yz + a_7 yu \\ + a_8 z^2 + a_9 zu + a_{10} u^2 = 0 , \\ b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 xz + b_4 xu + b_5 y^2 + b_6 yz + b_7 yu \\ + b_8 z^2 + b_9 zu + b_{10} u^2 = 0 , \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 u = 0 , \end{aligned} \right\} \dots (98),$$

dans lesquelles on a $g_1 = 2$, $g_2 = 2$, $g_3 = 1$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} j &= g_1 g_2 g_3 &= 4 &, \\ v &= \frac{7.6.5}{1.2.3} &= 35 &, \\ v_1 &= 2 \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} + \frac{6.5.4}{1.2.3} &= 40 &, \\ v_2 &= 2 \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{3.2.1}{1.2.3} &= 9 &, \\ v_3 &= \frac{2.1.0}{1.2.3} &= 0 &, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (99).$$

A l'aide des assemblants qui se rapportent aux équations (98), on trouve immédiatement l'équation finale entre y et z :

$$\begin{aligned} p_{32,33,34,35} z^4 + p_{31,33,34,35} z^3 u + p_{31,32,34,35} z^2 u^2 \\ + p_{31,32,33,35} z u^3 + p_{31,32,33,34} u^4 = 0 \dots \dots \dots (100), \end{aligned}$$

dans laquelle les coefficients sont des déterminants du degré 31.

Les autres équations finales et les équations terminales s'obtiennent de la même manière.

Les coefficients de l'équation finale (100) sont tous divisibles par le quotient de deux déterminants dont l'un est du degré $27 - 2 = 25$ et l'autre du degré 2, de sorte que le degré de ces coefficients se réduit à 8, ce qui s'accorde avec la valeur $g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2$.

On trouve ces déterminants en considérant les assemblants par lesquels on obtient le résultant des équations données et de l'équation homogène du premier degré à coefficients indéterminés.

Les valeurs v qui se rapportent à la détermination du résultant de ces équations sont les suivants :

$$\begin{array}{rcl}
 v & = & \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35, \\
 v'_1 & = & 2 \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} + 2 \cdot \frac{6.5.4}{1.2.3} = 60, \\
 v'_2 & = & \frac{3.2.1}{1.2.3} + 4 \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{5.4.3}{1.2.3} = 27, \\
 v'_3 & = & 2 \cdot \frac{2.1.0}{1.2.3} + 2 \cdot \frac{3.2.1}{1.2.3} = 2, \\
 v'_4 & = & \frac{1.0.-1}{1.2.3} = 0,
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl}} \right\} \dots\dots\dots (101),$$

d'où l'on peut conclure aux résultats déjà mentionnés.

Remarque. Si l'on avait choisi pour le degré de la fonction F une valeur j supérieure à $g_1 g_2 \dots g_n$, on aurait obtenu différentes équations du degré k entre les deux variables restantes. Les coefficients de ces équations peuvent se réduire néanmoins à des formes du degré $\Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1}$, ce qu'on peut prouver de la même manière que dans le cas où l'on a choisi $j = g_1 g_2 \dots g_n$.

§ 30. Dans le cas où l'on a

$$\sum_1^n g_K - (n-1) < g_1 g_2 \dots g_n \dots\dots\dots (102),$$

on peut trouver l'équation finale en prenant pour le degré de la fonction F une valeur inférieure à $g_1 g_2 \dots g_n$.

La plus petite valeur qu'on puisse prendre alors, est $\sum_1^n g_K - (n-1)$, c'est-à-dire dans l'exemple du paragraphe précédent

$$j = g_1 + g_2 + g_3 - 2 = 3 \dots\dots\dots (103).$$

Par là on obtient les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{rcl}
 v & = & \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20, \\
 v_1 & = & 2 \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} + \frac{5.4.3}{1.2.3} = 18, \\
 v_2 & = & 2 \cdot \frac{3.2.1}{1.2.3} + \frac{2.1.0}{1.2.3} = 2, \\
 v_3 & = & \frac{1.0.-1}{1.2.3} = 0,
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl}} \right\} \dots\dots\dots (104),$$

et

$$\begin{array}{rcl}
 v & = & \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20, \\
 v'_1 & = & 2 \cdot \frac{4.3.2}{1.2.3} + 2 \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3} = 28, \\
 v'_2 & = & \frac{2.1.0}{1.2.3} + 4 \cdot \frac{3.2.1}{1.2.3} + \frac{4.3.2}{1.2.3} = 8, \\
 v'_3 & = & 2 \cdot \frac{1.0.-1}{1.2.3} + 2 \cdot \frac{2.1.0}{1.2.3} = 0, \\
 v'_4 & = & \frac{0.-1.-2}{1.2.3} = 0,
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl}} \right\} \dots\dots\dots (105).$$

A l'aide de l'assemblant qui se rapporte à la fonction F appartenant aux équations données, on obtient sans difficulté les deux équations terminales :

$$\begin{array}{l}
 p_{17,18,19,20} y u^2 + p_{16,18,19,20} z^3 + p_{16,17,19,20} z^2 u + p_{16,17,18,20} z u^2 + p_{16,17,18,19} u^3 = 0, \\
 -p_{17,18,19,20} y z u + p_{15,18,19,20} z^3 + p_{15,17,19,20} z^2 u + p_{15,17,18,20} z u^2 + p_{15,17,18,19} u^3 = 0,
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l}} \right\} (106).$$

Multipliant les équations (106) respectivement par z et u et ajoutant, on obtient l'équation finale entre z et u :

$$\begin{aligned}
 & p_{16,18,19,20} z^4 + (p_{16,17,19,20} + p_{15,18,19,20}) z^3 u + (p_{16,17,18,20} + p_{15,17,19,20}) z^2 u^2 \\
 & + (p_{16,17,18,19} + p_{15,17,18,20}) z u^3 + p_{15,17,18,19} u^4 = 0 \dots\dots\dots (107).
 \end{aligned}$$

De la même manière on peut obtenir les autres équations finales.

Les coefficients de ces équations, qui sont du seizième degré, sont encore divisibles par un déterminant du huitième degré, comme on peut le voir dans la troisième formule (105).

ÉVALUATION D'UNE FONCTION HOMOGÈNE QUELCONQUE DES VALEURS QUI FORMENT UN SYSTÈME DE RACINES DE N ÉQUATIONS HOMOGÈNES À $N+1$ VARIABLES.

§ 31. La méthode d'élimination exposée dans ce qui précède nous permet de déterminer l'équation finale entre deux quelconques des variables, et les équations terminales pour évaluer les autres variables.

En résolvant ces équations on obtient les systèmes de racines ou les solutions communes des n équations homogènes données à $n+1$ variables.

Nous nous proposons de déterminer dans ce qui suit une fonc-

tion homogène quelconque des valeurs qui forment un système de racines de ces équations ¹⁾.

Il est clair que l'équation qui donne la solution de ce problème est du degré $g_1 g_2 \dots g_n$, si les n équations données sont respectivement des degrés g_1, g_2, \dots, g_n .

Pour le démontrer, égalons à un symbole quelconque la fonction homogène à évaluer. Transportons ce symbole au premier membre de l'égalité obtenue, et mettons-le dans le coefficient d'un terme qui a pour argument une seule variable. De cette manière on obtient une équation homogène à $n+1$ variables dont l'un des termes renferme dans son coefficient le symbole introduit, divisé par l'argument de ce terme.

Si l'on joint cette équation aux n équations homogènes données, on obtient un système de $n+1$ équations homogènes à $n+1$ variables. Le résultant de ces équations, étant par rapport aux coefficients de la dernière équation du degré $g_1 g_2 \dots g_n$, égalé à zéro, forme une équation qui est par rapport au symbole introduit du degré $g_1 g_2 \dots g_n$. C. Q. F. D.

En développant le premier membre de cette équation d'après les puissances ascendantes du symbole introduit, on verra que le degré des coefficients de ce développement diminue d'une unité de terme à terme. Si le symbole introduit représente une fonction du degré g_{n+1} , le plus petit degré de ces coefficients sera $g_1 g_2 \dots g_{n+1} \sum_{1}^n \frac{1}{g_K}$ et le plus grand $g_1 g_2 \dots g_{n+1} \sum_{1}^{n+1} \frac{1}{g_K}$.

§ 32. La méthode exposée dans le paragraphe précédent fournit pour l'évaluation de la fonction cherchée une équation dans laquelle le symbole introduit paraît implicitement dans des déterminants qui forment le premier membre de cette équation.

Il est plus aisé de former immédiatement une équation qui est ordonnée d'après les puissances ascendantes ou descendantes de ce symbole. Les méthodes que nous avons appliquées pour trouver les équations finales, conduisent à la solution de ce problème.

Afin de démontrer cette assertion, représentons la fonction cherchée, si elle est du degré g_{n+1} , par la $g_{n+1}^{ième}$ puissance d'un symbole quelconque que l'on peut regarder comme une nouvelle variable. On obtient ainsi un système de $n+1$ équations homogènes à $n+2$

¹⁾ LIOUVILLE a traité cette question, mais d'une autre manière, pour le cas où il y a deux équations non-homogènes à deux variables. Voir: J. A. SERRET, Cours d'Algèbre Supérieure.

variables. L'équation finale de ce système entre le symbole introduit et l'une des autres variables donne la solution du problème proposé. On verra que les termes qui contiendraient les puissances du symbole introduit et dont l'exposant n'est pas divisible par g_{n+1} , n'entrent pas dans cette équation.

§ 33. Appliquons la théorie du paragraphe précédent à quelques exemples, et prenons en premier lieu les deux équations:

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z &= 0, \end{aligned} \quad \left\{ \dots (108), \right.$$

d'où nous nous proposons d'évaluer la fonction homogène du premier degré:

$$u \equiv c_1 x + c_2 y + c_3 z \dots \dots \dots (109).$$

De cette fonction on déduit l'équation homogène à quatre variables:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z - u = 0 \dots \dots \dots (110).$$

Des trois équations homogènes (108) et (110) à quatre variables on peut déduire les deux assemblants suivants:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	
$p_1 = x^2$	a_1	b_1				c_1				
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1			c_2	c_1			
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1		c_3		c_1		
$p_4 = xu$					b_1	-1			c_1	
$p_5 = y^2$	a_4		b_2				c_2			
$p_6 = yz$	a_5		b_3	b_2			c_3	c_2		
$p_7 = yu$					b_2		-1		c_2	
$p_8 = z^2$	a_6			b_3				c_3		
$p_9 = zu$					b_3			-1	c_3	
$p_{10} = u^2$									-1	

..... (111),

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9		
t_1		c_1	c_2	c_3	-1	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$		 (112),

d'où l'on obtient l'équation cherchée entre z et u :

$$p_{3,10} z^2 + p_{8,10} zu + p_{8,9} u^2 = 0 \dots\dots\dots (113),$$

dans laquelle les coefficients sont des déterminants de l'assemblant que l'on obtient en supprimant dans l'assemblant (111) une colonne quelconque, la première et la dernière exceptées.

Ces coefficients sont tous divisibles, outre par le déterminant supplémentaire de l'assemblant (112), par le déterminant $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, ce qu'on peut prouver de la même manière qu'au § 27.

En divisant ces coefficients par leur plus grand commun diviseur ils se réduisent à des formes dont le plus grand degré est cinq, ce qui s'accorde avec la valeur du § 31.

Choisissons comme deuxième exemple les mêmes équations (108) et évaluons la fonction homogène du second degré:

$$u^2 \equiv c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 xz + c_4 y^2 + c_5 yz + c_6 z^2 \dots\dots\dots (114).$$

En opérant de la même manière que dans l'exemple précédent on obtiendra pour résultat l'équation

$$p_{32,33,34,35} z^4 + p_{31,32,34,35} z^2 u^2 + p_{31,32,33,34} u^4 = 0 \dots\dots\dots (115),$$

qui est analogue à l'équation (100) du § 29.

Les coefficients de cette équation, étant tout au plus du degré 31, sont divisibles par le quotient de deux déterminants dont le premier est du degré 25 et l'autre du degré 2, de sorte que la plus grande valeur pour le degré de ces coefficients se réduit à huit, ce qui s'accorde avec la théorie du § 31.

Si nous substituons dans l'équation (115) à u^2 un symbole du premier degré, le degré de cette équation par rapport à u se réduit alors à 2, ce qui s'accorde avec la valeur du § 31.

§ 34. Dans le cas où l'on a

$$\sum_{1}^{n+1} g_K - n < g_1 g_2 \dots g_{n+1} \dots\dots\dots (116),$$

le degré de la fonction F est encore susceptible de diminution. Pour trouver l'équation cherchée, on se sert, comme au § 30, de plusieurs équations terminales.

Ce cas se présente dans le deuxième exemple du paragraphe précédent, où l'on a $g_1 = 2$, $g_2 = 1$, $g_3 = 2$. La plus petite valeur qu'on puisse prendre pour le degré de la fonction F , est dans ce cas trois.

De la manière connue on obtient les deux équations terminales:

$$\left. \begin{aligned} p_{17,18,19,20} y u^2 + p_{16,18,19,20} z^3 + p_{16,17,18,20} z u^2 &= 0, \\ -p_{17,18,19,20} y z u + p_{15,17,19,20} z^2 u + p_{15,17,18,19} u^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots (117),$$

d'où l'on peut déduire en éliminant y l'équation cherchée :

$$p_{16,18,19,20} z^4 + (p_{16,17,18,20} + p_{15,17,19,20}) z^2 u^2 + p_{15,17,18,19} u^4 = 0. (118),$$

qui est analogue à l'équation (107).

Comme au § 30 on peut prouver que les coefficients de cette équation, étant tout au plus du degré 16, sont divisibles par un commun facteur du degré 8, de sorte que la plus grande valeur du degré de ces coefficients se réduit à huit.

III. Elimination entre n équations homogènes à $n + n_1$ variables.

§ 35. Dans ce cas, qui est le plus général, on peut éliminer $n - 1$ variables, de sorte que le résultat est une équation homogène à $n_1 + 1$ variables. Cette équation sera l'équation finale, si le degré en est égal à $g_1 g_2 \dots g_n$. Le degré de ses coefficients (§ 1) doit être égal à $\Sigma g_1 g_2 \dots g_{n-1}$.

Les méthodes expliquées dans les chapitres précédents sont encore applicables dans ce cas, mais elles suffisent telles quelles seulement pour trouver l'équation finale dans le cas particulier où les équations données, à l'exception d'une d'entre elles, sont du premier degré.

Voici quelques exemples:

1. Deux équations homogènes à quatre variables, dont la première est du second et l'autre du premier degré:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 xu + a_5 y^2 + a_6 yz + a_7 yu \\ + a_8 z^2 + a_9 zu + a_{10} u^2 &= 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 u &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (119).$$

Prenant $j = 2$, on obtient les valeurs:

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{j+3}{3} = 10, \\ v_1 &= \frac{3.2.1}{1.2.3} + \frac{4.3.2}{1.2.3} = 5, \\ v_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (120),$$

et l'assemblant:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	
$p_1 = x^2$	a_1	b_1				
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1			
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1		
$p_4 = xu$	a_4	b_4			b_1	
$p_5 = y^2$	a_5		b_2		 (121).
$p_6 = yz$	a_6		b_3	b_2		
$p_7 = yu$	a_7		b_4		b_2	
$p_8 = z^2$	a_8			b_3		
$p_9 = zu$	a_9			b_4	b_3	
$p_{10} = u^2$	a_{10}				b_4	

d'où l'on peut déduire l'équation finale entre y , z et u :

$$\begin{aligned} p_{6,7,8,9,10} y^2 + p_{5,7,8,9,10} yz + p_{5,6,8,9,10} yu + p_{5,6,7,9,10} z^2 \\ + p_{5,6,7,8,10} zu + p_{5,6,7,8,9} u^2 = 0 \dots \dots \dots (122). \end{aligned}$$

De la même manière on peut obtenir les autres équations finales.

Les coefficients de l'équation (122) sont des déterminants du cinquième degré, tous divisibles par b_1^2 . On peut trouver ce commun

facteur en prenant, outre les deux équations données, les deux équations du premier degré à coefficients indéterminés :

$$\left. \begin{aligned} c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 u &= 0, \\ d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 u &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (123).$$

Le résultant des quatre équations homogènes (119) et (123) à quatre variables peut s'exprimer par

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & b_1 & & c_1 & \\ a_3 & b_3 & & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_5 & & b_2 & & c_2 & \\ a_6 & & b_3 & b_2 & c_3 & c_2 & d_2 \\ a_7 & & b_4 & b_2 & c_4 & c_2 & d_2 \\ a_8 & & & b_3 & & c_3 & d_3 \\ a_9 & & & b_4 & b_3 & c_4 & c_3 & d_4 & d_3 \\ a_{10} & & & & b_4 & & c_4 & & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -b_1 & & & \\ d_1 & -c_1 & -c_2 & \\ & b_1 & b_2 & \end{vmatrix} . (124).$$

Posons $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0$.

Prenant $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, d_3 et d_4 arbitraires, on peut conclure que $p_{5,6,7,8,9}$, $p_{5,6,7,8,10}$, $p_{5,6,7,9,10}$ sont divisibles par b_1^2 .

Prenant $c_4 = 0$, $d_3 = 0$, c_3 et d_4 arbitraires, on trouve que $p_{6,7,8,9,10}$ et $p_{5,7,8,9,10}$ sont divisibles par b_1^2 .

Prenant $c_3 = 0$, $d_4 = 0$, c_4 et d_3 arbitraires, on conclut que $p_{5,6,8,9,10}$ est aussi divisible par b_1^2 .

2. Trois équations homogènes à cinq variables dont la première est du second et les deux autres du premier degré :

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 xu + a_5 xv + a_6 y^2 + a_7 yz + a_8 yu \\ + a_9 yv + a_{10} z^2 + a_{11} zu + a_{12} zv + a_{13} u^2 + a_{14} uv + a_{15} v^2 &= 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 u + b_5 v &= 0, \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 u + c_5 v &= 0, \end{aligned} \right\} . (125).$$

Prenant $j = 2$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 v &= \binom{j+1}{4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15, \\
 v_1 &= \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} + 2 \cdot \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 11, \\
 v_2 &= \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} + 2 \cdot \frac{3.2.1.0}{1.2.3.4} = 1, \\
 v_3 &= 0,
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} v \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{aligned}} \right\} \dots\dots\dots (126),$$

et les assemblants :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
$p_1 = x^2$	a_1	b_1					c_1				
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1				c_2	c_1			
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1			c_3		c_1		
$p_4 = xu$	a_4	b_4			b_1		c_4			c_1	
$p_5 = xv$	a_5	b_5				b_1	c_5				c_1
$p_6 = y^2$	a_6		b_2					c_2			
$p_7 = yz$	a_7		b_3	b_2				c_3	c_2		
$p_8 = yu$	a_8		b_4		b_2			c_4		c_2	
$p_9 = yv$	a_9		b_5			b_2		c_5			c_2
$p_{10} = z^2$	a_{10}			b_3					c_3		
$p_{11} = zu$	a_{11}			b_4	b_3				c_4	c_3	
$p_{12} = zv$	a_{12}			b_5		b_3			c_5		c_3
$p_{13} = u^2$	a_{13}				b_4					c_4	
$p_{14} = uv$	a_{14}				b_5	b_4				c_5	c_4
$p_{15} = v^2$	a_{15}					b_5					c_5

..... (127),

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
t_1		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$	$-b_5$

. (128),

d'où l'on peut déduire l'équation finale entre z , u et v :

$$\begin{aligned}
 & p_{11,12,13,14,15} z^2 + p_{10,12,13,14,15} zu + p_{10,11,13,14,15} zv + p_{10,11,12,14,15} u^2 \\
 & + p_{10,11,12,13,15} uv + p_{10,11,12,13,14} v^2 = 0 \dots\dots\dots (129).
 \end{aligned}$$

Les coefficients de cette équation sont des déterminants du dixième degré, tous divisibles par un facteur du cinquième degré, c'est-à-dire par $c_1 \times \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2$, après suppression de la deuxième colonne dans l'assemblant (127).

On peut trouver ce facteur de la même manière que dans l'exemple précédent.

3. Deux équations homogènes à cinq variables dont la première est du second et l'autre du premier degré :

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 xu + a_5 xv + a_6 y^2 + a_7 yz + a_8 yu + a_9 yv \\ + a_{10} z^2 + a_{11} zu + a_{12} zv + a_{13} u^2 + a_{14} uv + a_{15} v^2 = 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 u + b_5 v = 0, \end{aligned} \right\} (130).$$

Prenant $j = 2$, on obtient les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{j+4}{4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15, \\ v_1 &= \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 6, \\ v_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (131),$$

et l'assemblant

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
$p_1 = x^2$	a_1	b_1					
$p_2 = xy$	a_2	b_2	b_1				
$p_3 = xz$	a_3	b_3		b_1			
$p_4 = xu$	a_4	b_4			b_1		
$p_5 = xv$	a_5	b_5				b_1	
$p_6 = y^2$	a_6		b_2				
$p_7 = yz$	a_7		b_3	b_2			
$p_8 = yu$	a_8		b_4		b_2		$\dots\dots\dots (132),$
$p_9 = yv$	a_9		b_5			b_2	
$p_{10} = z^2$	a_{10}			b_3			
$p_{11} = zu$	a_{11}			b_4	b_3		
$p_{12} = zv$	a_{12}			b_5		b_3	
$p_{13} = u^2$	a_{13}				b_4		
$p_{14} = uv$	a_{14}				b_5	b_4	
$p_{15} = v^2$	a_{15}					b_5	

d'où l'on peut obtenir facilement l'équation finale entre y, z, u et v .

Les coefficients de cette équation sont tous divisibles par b_1^3 , de sorte que leur degré peut se réduire à 3, la somme des degrés des deux équations données.

§ 36. Dans le paragraphe précédent nous nous sommes borné à considérer des exemples où l'on a

$$\sum_1^n g_K - (n - 1) = g_1 g_2 \dots g_n \dots \dots \dots (133).$$

Si cette condition est remplie, il est aisé d'obtenir immédiatement l'équation finale en appliquant l'une des deux méthodes expliquées dans le premier chapitre.

Il est clair que l'équation (133) est seulement vérifiée, si toutes les équations données, à l'exception d'une d'entre elles, sont du premier degré.

Prenant dans ce cas $j = g_1 g_2 \dots g_n$, on obtient les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{j + n + n_1 - 1}{n + n_1 - 1} , \\ v_1 &= \binom{n - 1}{1} \binom{j + n + n_1 - 2}{n + n_1 - 1} + 1 , \\ v_2 &= \binom{n - 1}{2} \binom{j + n + n_1 - 3}{n + n_1 - 1} , \\ v_3 &= \binom{n - 1}{3} \binom{j + n + n_1 - 4}{n + n_1 - 1} , \\ &\dots \dots \dots \\ v_{n-1} &= \binom{n - 1}{n - 1} \binom{j + n_1}{n + n_1 - 1} , \\ v_n &= 0 , \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (134).$$

L'assemblant de la fonction F se compose alors de v lignes et de v_1 colonnes. Les colonnes de cet assemblant sont liées par $v_2 - v_3 + v_4 - \dots + (-1)^n v_n$ relations linéaires, de sorte que $v_1 - v_2 + v_3 - \dots + (-1)^n v_n$ colonnes sont indépendantes entre elles.

Entre les valeurs v il existe dans ce cas la relation suivante :

$$v - v_1 + v_2 - v_3 + \dots + (-1)^n v_n = \binom{j + n_1}{n_1} - 1 . (135).$$

On peut démontrer cette relation en substituant les valeurs (134) dans le premier membre de l'équation (135), d'où l'on trouve :

$$v - v_1 + v_2 - \dots + (-1)^n v_n = -1 + \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{j+n+n_1-1-k}{n+n_1-1} \quad (136);$$

le deuxième membre de cette équation est, d'après la note 3 à la fin de ce mémoire, égal à $\binom{j+n_1}{n_1} - 1$.

L'équation (135) nous montre que les lignes de l'assemblant de la fonction F sont liées par $\binom{j+n_1}{n_1} - 1$ relations linéaires, de sorte que $v + 1 - \binom{j+n_1}{n_1}$ lignes quelconques sont indépendantes entre elles.

Comme $\binom{j+n_1}{n_1}$ est précisément le nombre des termes de l'équation finale entre les $n_1 + 1$ variables restantes, on conclut qu'on peut déterminer les coefficients θ de la fonction F de telle sorte que seuls les termes qui n'appartiennent pas à l'équation finale, disparaissent de cette fonction.

De cette manière on obtient donc l'équation finale.

Les coefficients de cette équation sont des déterminants du degré $v + 1 - \binom{j+n_1}{n_1}$, contenus dans un assemblant de v lignes et de $v + 1 - \binom{j+n_1}{n_1}$ colonnes. Tous les déterminants de cet assemblant sont divisibles par un commun facteur du degré $v_2 - 2v_3 + 3v_4 - \dots + (-1)^{n-1} (n-1) v_n$.

En divisant par ce commun facteur, les coefficients de l'équation finale se réduisent à des formes du degré

$$v_1 - 2v_2 + 3v_3 - \dots + (-1)^{n-1} n v_n = 1 + \sum_{k=1}^{k=n-1} (-1)^k k \binom{n-1}{k} \binom{j+n+n_1-1-k}{n+n_1-1} = 1 + (n-1) \binom{j+n_1}{n_1} \quad (137),$$

d'après la note 4 à la fin de ce mémoire.

Pourtant ce n'est pas la plus petite valeur pour le degré de ces coefficients.

Ils ont encore un commun facteur du degré $(n-1) \left[\binom{j+n_1}{n_1} - j \right]$, qu'on pourra déterminer dans chaque cas particulier en prenant, outre les n équations homogènes données, n_1 équations homogènes du premier degré à coefficients indéterminés.

§ 37. Dans le cas où l'on a

$$\sum_1^n g_k - (n - 1) < g_1 g_2 \dots g_n \dots \dots \dots (138),$$

les méthodes du chapitre premier sont encore applicables pour déterminer l'équation entre les $n_1 + 1$ variables restantes, mais le degré de l'équation ainsi obtenue s'élève à $g_1 g_2 \dots g_n$.

Soit j le degré de la fonction F , on obtient un assemblant de v lignes et de v_1 colonnes dont $v_1 = v_2 + v_3 - \dots + (-1)^{n-1} v_n$ colonnes sont indépendantes entre elles.

Les valeurs v sont dans ce cas les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{j + n + n_1 - 1}{n + n_1 - 1} \\ v_1 &= \sum_1^n \binom{j - g_k + n + n_1 - 1}{n + n_1 - 1} \\ v_2 &= \sum_1^n \binom{j - g_{k_1} - g_{k_2} + n + n_1 - 1}{n + n_1 - 1} \\ &\dots \dots \dots \\ v_n &= \binom{j - g_1 - g_2 - \dots - g_n + n + n_1 - 1}{n + n_1 - 1} \end{aligned} \right\} \dots \dots (139).$$

Le nombre des termes de l'équation résultante entre $n_1 + 1$ quelconques des variables est $\binom{j + n_1}{n_1}$.

Les méthodes du premier chapitre conduiraient immédiatement à l'équation résultante entre les $n_1 + 1$ variables restantes, si $v_1 = v_2 + v_3 - \dots + (-1)^{n-1} v_n$ n'était pas inférieur à $v + 1 - \binom{j + n_1}{n_1}$, ou si l'on avait

$$v - v_1 + v_2 - \dots + (-1)^n v_n \leq \binom{j + n_1}{n_1} - 1 \dots (140).$$

On doit donc choisir dans ce cas la valeur de j telle que la relation (140) soit vérifiée.

§ 38. Prenons pour exemple deux équations homogènes du second degré à quatre variables :

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 xu + a_5 y^2 + a_6 yz + a_7 yu + a_8 z^2 \\ \quad \quad \quad + a_9 zu + a_{10} u^2 = 0, \\ b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 xz + b_4 xu + b_5 y^2 + b_6 yz + b_7 yu + b_8 z^2 \\ \quad \quad \quad + b_9 zu + b_{10} u^2 = 0, \end{aligned} \right\} \dots (141).$$

Quelle est dans ce cas la plus petite valeur qu'on puisse donner à j pour obtenir immédiatement l'équation cherchée à trois variables ?

Prenant $j = 4$, on obtient

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{j+3}{3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35, \\ v_1 &= 2. \frac{5.4.3}{1.2.3} = 20, \\ v_2 &= \frac{3.2.1}{1.2.3} = 1, \\ \binom{j+n_1}{n_1} &= \frac{6.5}{1.2} = 15, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (142).$$

De ces valeurs on déduit $v - v_1 + v_2 = 16$ et $\binom{j+n_1}{n_1} - 1 = 14$, d'où l'on conclut que la valeur $j = 4$ ne satisfait pas à l'équation (140).

Prenant $j = 5$, on obtient

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{j+3}{3} = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56, \\ v_1 &= 2. \frac{6.5.4}{1.2.3} = 40, \\ v_2 &= \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4, \\ \binom{j+n_1}{n_1} &= \frac{7.6}{1.2} = 21, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (143).$$

De ces valeurs on trouve $v - v_1 + v_2 = 20$ et $\binom{j+n_1}{n_1} - 1 = 20$, d'où l'on conclut que la valeur $j = 5$ vérifie l'équation (140). Pour cette valeur de j la fonction L' conduit donc immédiatement à l'équation cherchée à trois variables.

Cette équation est du cinquième degré. Ses coefficients sont des déterminants du degré 36. Ils sont contenus dans un assemblant dont tous les déterminants sont divisibles par un facteur du quatrième degré, mais les coefficients de l'équation obtenue ont un commun facteur d'un degré plus élevé.

Ce facteur s'obtiendrait en prenant, outre les équations données (141), deux équations homogènes du premier degré à quatre variables, ayant des coefficients indéterminés, mais la question de rechercher ce commun facteur est très compliquée.

§ 39. On peut trouver aussi l'équation résultante entre les $n_1 + 1$ variables restantes en partant de plusieurs équations terminales.

La plus petite valeur qu'on puisse choisir pour j est en ce cas

$\sum_1^n g_K - (n-1)$, c'est-à-dire trois dans l'exemple de deux équations du second degré à quatre variables. Pour cette valeur de j , on a les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{j+3}{3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20, \\ v_1 &= 2. \frac{4.3.2}{1.2.3} = 8, \\ v_2 &= 0, \\ \binom{j+n_1}{n_1} &= \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (144),$$

d'où l'on peut conclure que les équations terminales contiennent 13 termes, dont trois au moins renferment la quatrième variable.

Les coefficients de ces équations terminales sont des déterminants du huitième degré contenus dans l'assemblant suivant :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	
$p_1 = x^3$	a_1				b_1				
$p_2 = x^2y$	a_2	a_1			b_2	b_1			
$p_3 = x^2z$	a_3		a_1		b_3		b_1		
$p_4 = x^2u$	a_4			a_1	b_4			b_1	
$p_5 = xy^2$	a_5	a_2			b_5	b_2			
$p_6 = xyz$	a_6	a_3	a_2		b_6	b_3	b_2		
$p_7 = xyu$	a_7	a_4		a_2	b_7	b_4		b_2	
$p_8 = xz^2$	a_8		a_3		b_8		b_3		
$p_9 = xzu$	a_9		a_4	a_3	b_9		b_4	b_3	
$p_{10} = xu^2$	a_{10}			a_4	b_{10}			b_4	
$p_{11} = y^3$		a_5				b_5			
$p_{12} = y^2z$		a_6	a_5			b_6	b_5		
$p_{13} = y^2u$		a_7		a_5		b_7		b_5	
$p_{14} = yz^2$		a_8	a_6			b_8	b_6		
$p_{15} = yzu$		a_9	a_7	a_6		b_9	b_7	b_6	
$p_{16} = yu^2$		a_{10}		a_7		b_{10}		b_7	
$p_{17} = z^3$			a_8				b_8		
$p_{18} = z^2u$			a_9	a_8			b_9	b_8	
$p_{19} = zu^2$			a_{10}	a_9			b_{10}	b_9	
$p_{20} = u^3$				a_{10}				b_{10}	

En éliminant entre deux de ces équations terminales la quatrième variable, on obtient l'équation cherchée à trois variables. Elle est du cinquième degré.

On peut effectuer cette élimination d'une manière plus simple en formant quatre équations terminales dont les termes qui renferment la quatrième variable, contiennent en tout quatre combinaisons différentes des variables.

Si l'on veut déterminer p. e. l'équation en y, z et u , on formera quatre équations terminales dont chacune contienne trois des quatre arguments xyu, xz^2, xzu, xu^2 , savoir la première xz^2, xzu, xu^2 , la deuxième xyu, xzu, xu^2 , la troisième xyu, xz^2, xu^2 , la quatrième xyu, xz^2, xzu .

En éliminant entre ces quatre équations les quatre arguments indiqués, ce qu'on peut faire en multipliant ces équations respectivement par yu, z^2, zu, u^2 , et en ajoutant les produits, on obtient une équation du cinquième degré à trois variables, dont les coefficients sont des sommes de déterminants du huitième degré.

Il est probable que ces coefficients sont encore divisibles par un commun facteur, mais la recherche de ce facteur est très compliquée.

§ 40. Quand on diminue encore le degré de la fonction F d'une unité, on obtient dans l'exemple précédent l'assemblant suivant:

	s_1	s_2	
$\rho_1 = x^2$	a_1	b_1	
$\rho_2 = xy$	a_2	b_2	
$\rho_3 = xz$	a_3	b_3	
$\rho_4 = xu$	a_4	b_4	
$\rho_5 = y^2$	a_5	b_5	
$\rho_6 = yz$	a_6	b_6 (146),
$\rho_7 = yu$	a_7	b_7	
$\rho_8 = z^2$	a_8	b_8	
$\rho_9 = zu$	a_9	b_9	
$\rho_{10} = u^2$	a_{10}	b_{10}	

d'où l'on peut déduire l'équation terminale :

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| xy + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| xz + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{array} \right| xu + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{array} \right| y^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_6 & b_6 \end{array} \right| yz \\
& + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_1 \\ a_7 & b_7 \end{array} \right| yu + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_8 & b_8 \end{array} \right| z^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_9 & b_9 \end{array} \right| zu + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_{10} & b_{10} \end{array} \right| u^2 = 0 \dots (147).
\end{aligned}$$

En substituant la valeur de x tirée de cette équation dans l'une des deux équations données (141), on obtient l'équation finale. Le degré de cette équation est quatre, comme ce doit être le cas, mais la formation de ses coefficients n'est pas si simple que dans le cas où l'on aurait choisi une plus grande valeur pour le degré de la fonction F .

NOTES.

1. Quelques théorèmes sur les coefficients binominaux.

$$1. \quad \text{Théorème:} \quad \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p} = 0.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p} &= \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \frac{n^{k/1-1} (n-k)^{n-p/1-1}}{1^{k/1} 1^{n-p/1}} = \\ &= \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \frac{n^{n-p+k/1-1}}{1^{k/1} 1^{p/1} (n-p)^{n-2p/1-1}} = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \frac{n^{p/1-1} (n-p)^{n-2p/1-1+k/1}}{1^{p/1} (n-p)^{n-2p/1-1} 1^{k/1}} \\ &= \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{n}{p} \cdot \frac{p^{k/1-1}}{1^{k/1}} = \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0. \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{Théorème:} \quad \sum_{k=0}^{k=p} \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} = \binom{q+r}{p}.$$

Démonstration *):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=p-1} \binom{q}{k} \binom{r}{p-1-k} &= \\ \frac{1}{q+r-p+1} \sum_{k=0}^{k=p-1} \left\{ (q-k) \binom{q}{k} \binom{r}{p-1-k} + (r-[p-1-k]) \binom{q}{k} \binom{r}{p-1-k} \right\} &= \\ \frac{1}{q+r-p+1} \sum_{k=0}^{k=p-1} \left\{ (k+1) \binom{q}{k+1} \binom{r}{p-1-k} + (p-k) \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} \right\} &= \\ \frac{1}{q+r-p+1} \left\{ \sum_{k=1}^{k=p} k \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} + p \sum_{k=0}^{k=p-1} \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} - \sum_{k=0}^{k=p-1} k \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} \right\} &= \\ \frac{1}{q+r-p+1} \left\{ p \binom{q}{p} \binom{r}{0} + p \sum_{k=0}^{k=p-1} \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} \right\} &= \frac{p}{q+r-p+1} \sum_{k=0}^{k=p} \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} \end{aligned}$$

*) Comparer: Wiskundige Opgaven met de Oplossingen door leden van het Wiskundig Genootschap, ter spreuke voerende „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven”. Amsterdam 1882. Tome I (1875—1881), n° 162.

De là il s'ensuit :

$$\sum_{k=0}^{k=p} \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} = \frac{q+r-p+1}{p} \sum_{k=0}^{k=p-1} \binom{q}{k} \binom{r}{p-1-k}.$$

En appliquant cette formule p -fois on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=p} \binom{q}{k} \binom{r}{p-k} &= \frac{(q+r-p+1)^{p/1}}{p^{p/1-1}} \sum_{k=0}^{k=0} \binom{q}{k} \binom{r}{-k} = \\ &= \frac{(q+r)^{p/1-1}}{1^{p/1}} = \binom{q+r}{p}. \end{aligned}$$

$$3. \text{ Théorème : } \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{s-k}{m} = \binom{s-n}{m-n}.$$

Démonstration : D'après la note 2, on a

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{s-k}{m} = \sum_{k=0}^{k=n} \left\{ (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{k_1=0}^{k_1=m} \binom{n-k}{k_1} \binom{s-n}{m-k_1} \right\}.$$

En développant la deuxième somme dans le second membre on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{s-k}{m} &= \binom{s-n}{m} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{0} + \\ &+ \binom{s-n}{m-1} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{1} + \binom{s-n}{m-2} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{2} + \dots \\ &\dots + \binom{s-n}{0} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{m} = \\ &= \binom{s-n}{m} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-k} + \binom{s-n}{m-1} \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-1-k} + \\ &+ \binom{s-n}{m-2} \sum_{k=0}^{k=n-2} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-2-k} + \dots + \binom{s-n}{m-n+2} \sum_{k=0}^{k=2} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{2-k} + \\ &+ \binom{s-n}{m-n+1} \sum_{k=0}^{k=1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{1-k} + \binom{s-n}{m-n} \binom{n}{0} \binom{n}{0} = \\ &= \binom{s-n}{m-n} + \sum_{k_1=1}^{k_1=n} \left\{ \binom{s-n}{m-n+k_1} \sum_{k=0}^{k=k_1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-k_1} \right\} = \binom{s-n}{m-n}, \end{aligned}$$

puisque, d'après la note 1 :

$$\sum_{k=0}^{k=k_1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-k_1} = 0.$$

4. *Théorème:*
$$\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} \binom{s-k}{m} = n \binom{s-n}{m-n+1}.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} \binom{s-k}{m} &= \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{k-1} n \binom{n-1}{k-1} \binom{s-1-(k-1)}{m} = \\ n \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{s-1-k}{m} &= n \binom{s-n}{m-n+1} \end{aligned}$$

d'après la note 3.

2. Quelques remarques relatives aux résultats obtenus par l'application des théories exposées dans ce mémoire.

1. *Notations des déterminants contenus dans un assemblant.*

Afin d'éviter toute confusion, l'auteur s'est cru obligé de suivre la notation indiquée au § 2 de son mémoire „Théorie générale de l'élimination”.

Les indices désignent les numéros des lignes ou des colonnes qu'il faut supprimer de l'assemblant pour obtenir le déterminant proposé. Si la différence entre le nombre des lignes et celui des colonnes n'est pas considérable, cette manière de noter les déterminants d'un assemblant n'offre aucune difficulté.

Les déterminants d'un assemblant sont tantôt précédés du signe +, tantôt du signe —. Nous regrettons de ne pas avoir réussi dans nos recherches d'une notation qui permette de supprimer ces deux signes.

2. *Construction des équations finales, des équations terminales et des autres équations résultantes.*

Il ne faut que peu d'exercice pour être en état de construire immédiatement les équations résultantes mentionnées ci-dessus d'un système de n équations homogènes à $n+1$ variables.

Le degré de ces équations est égal au produit des degrés des équations données.

Constituons l'assemblant de la fonction F qui se rapporte au système des équations données, prenant pour le degré de cette fonction la valeur déjà assignée, et mettons devant les lignes de cet assemblant les arguments des termes qui se rapportent à ces

lignes. Déterminons ensuite quelles colonnes de cet assemblant doivent être supprimées pour obtenir l'assemblant dont les déterminants forment les coefficients des susdites équations résultantes.

Si cet assemblant contient p lignes et q colonnes, où $p > q$, les susdites équations résultantes se composent de $p - q + 1$ termes.

En supprimant de cet assemblant les $p - q$ lignes qui se rapportent à $p - q$ termes de l'équation résultante qui nous occupe, on obtient un déterminant. Ce déterminant représente, au signe $+$ ou $-$ près, le coefficient du terme de l'équation résultante lequel ne se trouve pas parmi les $p - q$ termes dont les lignes correspondantes ont été supprimées dans l'assemblant.

3. Règle pour les signes $+$ ou $-$ des coefficients des termes des équations finales, des équations terminales et des autres équations résultantes.

Les signes $+$ et $-$ précédant les coefficients de ces équations s'expliquent par la formation de ces coefficients.

Quand on considère tous les termes d'une même équation résultante, il n'est pas difficile de déterminer quels termes doivent être précédés du signe $+$ ou de $-$.

Les coefficients de ces termes sont des déterminants du degré $p - q$, se composant de lignes identiques, à une ligne près. Quand on place cette dernière au-dessus des autres lignes, on passe un nombre pair ou impair de lignes.

Selon que le nombre des lignes passées est pair ou impair, on donne au déterminant le signe $+$ ou $-$ (ou inversement).

4. Equation terminale d'un degré plus élevé que le premier.

La méthode que nous avons indiquée pour l'obtention des équations finales, des équations terminales et des autres équations résultantes fournit un total de $\binom{p}{p-q+1}$ équations résultantes entre $p - q + 1$ arguments différents de la fonction F .

Si l'une des équations finales a des racines égales, le cas peut se présenter qu'il est impossible de trouver une équation terminale du premier degré par rapport à la variable qu'on veut évaluer. Dans ce cas tous les coefficients de cette équation terminale s'annulent.

Pour obtenir une équation qui peut remplacer cette équation terminale, on peut choisir une autre équation résultante où il entre,

à part les deux variables de l'équation finale, la variable considérée. Cette équation est alors d'un degré plus élevé que le premier. Les coefficients de cette équation sont encore des déterminants de l'assemblant qui fournit les coefficients de l'équation finale.

5. *Equation finale à plus de deux variables.*

Nous ne prétendons pas avoir épuisé dans le troisième chapitre le sujet de l'élimination de $n - 1$ variables entre n équations homogènes à $n + n_1$ variables; nous n'avons fait qu'y mentionner les résultats qu'on obtient en appliquant les méthodes des deux premiers chapitres.

À notre regret nous n'avons pu expliquer pourquoi les équations obtenues par l'application de ces méthodes sont de degrés plus hauts qu'il ne faut d'après notre théorie. Nous croyons que ce cas de l'élimination peut encore donner lieu à des recherches importantes.

(24 Juni 1901.)

Les Systèmes de Racines

d'un système
de n équations homogènes à $n + 1$ variables,

PAR

K. BES,

Professeur à l'école moyenne de l'Etat „Willem II” à Tilbourg.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel VIII. N° 2.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1902.

TABLE DES MATIÈRES.

Les systèmes de racines.....	5
Chapitre I. Une équation homogène à deux variables.....	24
1. Nombre des systèmes de racines indépendants.....	24
2. Cas où tous les systèmes de racines sont différents.....	25
3. Cas où quelques systèmes de racines sont égaux.....	26
Chapitre II. Deux équations homogènes à trois variables....	30
1. Nombre des systèmes de racines superflus.....	30
2. Evaluation des systèmes de racines.....	31
Premier cas. Tous les systèmes de racines des équations données sont différents.....	31
Deuxième cas. Les équations données admettent des systèmes de racines égaux.....	35
3. Détermination des systèmes de racines superflus en fonction des autres systèmes de racines.....	38
Chapitre III. Trois équations homogènes à quatre variables..	46
1. Nombre des systèmes de racines superflus.....	46
2. Evaluation des systèmes de racines.....	48
3. Les systèmes de racines superflus.....	50
Errata du mémoire „L'équation finale”.....	52

Les systèmes de racines.

§ 1. On appelle système de racines ou solution d'un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables $n + 1$ valeurs différentes de zéro, qu'on peut substituer aux variables pour rendre ces équations identiques.

Afin d'obtenir des systèmes de racines, il faut construire l'équation finale entre deux quelconques des variables et les équations terminales par lesquelles on peut évaluer les valeurs des autres variables. En résolvant ces équations, on obtient en tout $g_1 g_2 \dots g_n$ systèmes de racines, si les n équations données sont respectivement des degrés g_1, g_2, \dots, g_n .

On sait que les systèmes de racines ainsi obtenus ne sont pas pour chaque degré des équations données, indépendants entre eux.

Nous nous proposons dans ce qui suit :

1. de déterminer pour chaque degré des équations données le nombre des systèmes de racines qu'on peut regarder comme indépendants, et par conséquent le nombre des systèmes de racines superflus ;

2. de constituer les équations par lesquelles on peut évaluer les $g_1 g_2 \dots g_n$ systèmes de racines des équations données ;

3. d'indiquer quelques propriétés se rapportant à des systèmes de racines qui ont deux ou plusieurs éléments communs ;

4. de signaler les relations qui lient les systèmes de racines superflus aux systèmes de racines indépendants ; et

5. d'exprimer les systèmes de racines superflus en fonction des systèmes de racines indépendants.

§ 2. Avant d'entrer dans des détails, il nous semble utile de rappeler les propriétés de la fonction homogène :

$$F \equiv \varphi_1 \Phi_1 + \varphi_2 \Phi_2 + \varphi_3 \Phi_3 + \dots + \varphi_n \Phi_n \dots \dots \dots (1)$$

qui se rapporte à un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables :

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ q_n = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2),$$

respectivement des degrés $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$ ¹⁾.

Si la fonction F est du degré j , les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n$ à coefficients indéterminés s_1, s_2, \dots, s_{v_1} sont respectivement des degrés $j - g_1, j - g_2, j - g_3, \dots, j - g_n$.

Pour toute valeur du degré de la fonction F qui n'est pas inférieure à $\sum_1^n g_k - n$, on peut former avec les coefficients des équations données un assemblant qui contient v lignes et v_1 colonnes. Les colonnes de cet assemblant sont liées par v_2 relations linéaires liées à leur tour par v_3 relations linéaires, et ainsi de suite ²⁾.

Les valeurs v que nous avons en vue sont les suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} v = \binom{j+n}{n} \\ v_1 = \sum_1^n \binom{j-g_k+n}{n} \\ v_2 = \sum_1^n \binom{j-g_{k_1}-g_{k_2}+n}{n} \\ \dots\dots\dots \\ v_n = \binom{j-g_1-g_2-\dots-g_n+n}{n} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3).$$

Entre les valeurs v il existe, comme on sait, la relation:

$$v - v_1 + v_2 - \dots\dots\dots + (-1)^n v_n = g_1 g_2 \dots g_n \dots\dots\dots (4).$$

Après avoir supprimé de l'assemblant de la fonction F les colonnes qu'on peut regarder comme dépendantes des autres colonnes, on obtient un assemblant de v lignes et de $v_1 - v_2 + v_3 - \dots + (-1)^n v_n$

¹⁾ Nous supposons que deux quelconques des fonctions ϕ soient premières entre elles.

Pour s'en assurer, on détermine leur plus grand commun diviseur en appliquant l'opération connue. Si deux des fonctions ϕ avaient un commun facteur, le système des équations données se décomposerait en deux autres systèmes:

1. l'un de n équations homogènes à $n+1$ variables;
2. l'autre de $n-1$ équations homogènes à $n+1$ variables. Etc.

²⁾ Voir: L'équation finale (Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam [Eerste Sectie], deel VIII, n° 1), § 26.

colonnes, que nous appellerons l'assemblant des coefficients.

En donnant aux coefficients s des fonctions Φ les valeurs propres à éliminer un nombre de $v - g_1 g_2 \dots g_n - 1$ termes de la fonction F , on peut obtenir un total de $\binom{v}{g_1 g_2 \dots g_n + 1}$ équations résultantes, contenant chacune comme variables $g_1 g_2 \dots g_n + 1$ arguments différents de la fonction F .

La valeur $j = g_1 g_2 \dots g_n$ conduit, comme on sait, aux équations finales.

Si l'on prend pour j des valeurs inférieures à $g_1 g_2 \dots g_n$, on obtient des équations résultantes qui contiennent en général plus de deux variables.

La plus petite valeur qu'on puisse donner à j , est le plus grand degré des équations données; remarquons cependant que quelques valeurs v changent de signification, si l'on prend pour j des valeurs inférieures à $\sum_1^n g_k - n$. C'est le cas avec v_n et quelques autres valeurs v qui contiennent des coefficients binomiaux de puissances négatives.

Les coefficients binomiaux de puissances négatives qui se présentent dans les valeurs v , ne se rapportent pas à des relations linéaires entre les colonnes de l'assemblant de la fonction F ¹⁾. Aussi on ne s'en occupe pas, quand il s'agit de déterminer le nombre total des relations linéaires indépendantes qui existent entre les colonnes de l'assemblant de la fonction F .

Nous verrons plus tard que la présence de coefficients binomiaux de puissances négatives parmi les valeurs v , nous permet d'évaluer le nombre des systèmes de racines superflus des équations données.

§ 3. Prenons pour j une valeur qui n'est pas inférieure à $\sum_1^n g_k - n$; les déterminants de l'assemblant des coefficients forment les coefficients des équations résultantes découlant de la fonction F . Le nombre de ces déterminants est $\binom{v}{g_1 g_2 \dots g_n}$. Ces déterminants sont divisibles par un commun facteur du degré $v_2 - 2v_3 + 3v_4 - \dots + (-1)^n (n-1)v_n$.

Prenant $j = g_1 g_2 \dots g_n$, on ne trouve parmi les équations résultantes qu'une seule équation qui contient deux variables désignées; cette équation est, comme on sait, l'équation finale entre ces deux variables.

Pour bien faire comprendre ce qui suit, nous rappelons la propriété que les déterminants qui forment les coefficients d'une

¹⁾ Comparer: Théorie générale de l'élimination (Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam [Eerste Sectie], deel VI, n° 7), § 72 et § 104.

équation finale, sont tous divisibles par un facteur du degré $v - g_1 g_2 \dots g_n - g_1 g_2 \dots g_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k}$, y compris le facteur commun à tous les déterminants de l'assemblant des coefficients ¹⁾. Ce commun diviseur des coefficients d'une équation finale est composé des deux facteurs suivants :

1. du facteur commun à tous les déterminants de l'assemblant des coefficients, pour $j = g_1 g_2 \dots g_n$; et

2. d'un déterminant de l'assemblant des coefficients qui se rapporte à la valeur $j = g_1 g_2 \dots g_n - 1$, divisé par le facteur commun à tous les déterminants de cet assemblant.

Ce résultat découle immédiatement du § 21 de notre mémoire „L'équation finale.”

Prenons $j = g_1 g_2 \dots g_n - 1$ et formons des équations résultantes contenant outre $g_1 g_2 \dots g_n$ arguments de la fonction F composés seulement de deux variables désignées, l'un des autres arguments. Le coefficient du terme qui renferme l'argument nommé en dernier lieu, divisé par le facteur commun à tous les déterminants de l'assemblant dont il forme l'un des déterminants, est le facteur commun aux coefficients de l'équation finale entre les deux variables désignées, abstraction faite du facteur commun à tous les déterminants de l'assemblant des coefficients pour $j = g_1 g_2 \dots g_n$.

Plus tard nous verrons que, si ce coefficient s'évanouit, l'équation finale considérée a des systèmes de racines égaux.

Nous nous abstenons de mentionner encore d'autres propriétés se rapportant à la divisibilité des déterminants de l'assemblant des coefficients, ou de sommes de ces déterminants. S'il y a lieu d'appliquer ces propriétés dans la suite, nous nous proposons de les mentionner ²⁾.

§ 4. Pour toute valeur du degré de la fonction F les $g_1 g_2 \dots g_n$ systèmes de racines qu'on obtient par la résolution des équations finales forment un assemblant de $g_1 g_2 \dots g_n$ colonnes et de v lignes. Les colonnes de cet assemblant se composent des arguments consécutifs de la fonction F , après substitution successive des susdits systèmes de racines aux variables.

Appelons cet assemblant l'assemblant des systèmes de racines des équations données.

Entre cet assemblant et l'assemblant des coefficients il existe une relation importante qu'on peut énoncer par le théorème suivant:

¹⁾ Comparer: L'équation finale, § 28.

²⁾ Comparer: L'équation finale, § 19 et § 24.

L'assemblant des systèmes de racines des équations données est supplémentaire à l'assemblant des coefficients.

Pour démontrer ce théorème, substituons dans les équations résultantes qui découlent de la fonction F les $g_1 g_2 \dots g_n$ systèmes de racines des équations données. Chacune de ces équations fournit $g_1 g_2 \dots g_n$ équations linéaires homogènes entre les $g_1 g_2 \dots g_n + 1$ coefficients de ces équations. En résolvant ces équations par rapport aux coefficients on trouve que les déterminants de l'assemblant des coefficients sont proportionnels aux déterminants supplémentaires de l'assemblant des systèmes de racines des équations données.

Les deux assemblants contiennent un nombre égal v de lignes, tandis que le nombre des colonnes du premier déterminant est $v_1 - v_2 + v_3 - \dots + (-1)^{n-1} v_n$, celui des colonnes du second $g_1 g_2 \dots g_n$, ensemble v , d'après la relation (4).

Ces deux assemblants sont donc réellement supplémentaires.

§ 5. Si les $g_1 g_2 \dots g_n$ systèmes de racines qu'on obtient en résolvant les équations finales sont tous différents, les lignes de l'assemblant des systèmes de racines sont liées par $v_1 - v_2 + v_3 - \dots + (-1)^{n-1} v_n$ relations linéaires. Comme ce nombre est précisément égal à $v - g_1 g_2 \dots g_n$, on en conclut que les colonnes de cet assemblant sont indépendantes.

C'est le cas, si l'on ne prend pas des valeurs pour j inférieures à $\sum_1^n g_K - n$.

Si le plus grand degré des équations données est inférieur à ce nombre, les $g_1 g_2 \dots g_n$ systèmes de racines ne sont pas indépendants.

Prenant dans ce cas pour le degré de la fonction F le plus grand degré des équations données, les lignes de l'assemblant des systèmes de racines sont liées par un nombre k_1 de relations linéaires indépendantes, où $k_1 > v_1 - v_2 + v_3 - \dots + (-1)^{n-1} v_n$, et par conséquent les colonnes sont liées par $k = k_1 - (v - g_1 g_2 \dots g_n)$ relations linéaires, d'après le § 56* de notre mémoire „Théorie générale de l'élimination.” On en conclut que le nombre des systèmes de racines superflus est égal à k .

Remarque. Le théorème des assemblants supplémentaires est encore applicable dans le cas où l'on prend pour j une valeur inférieure à $\sum_1^n g_K - n$, si l'on supprime de l'assemblant des systèmes de racines un nombre de k colonnes, qu'on peut regarder comme dépendantes des autres colonnes.

§ 6. Le théorème des assemblants supplémentaires donne le

moyen de remplacer les coefficients des équations résultantes par les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines des équations données. De cette manière on obtient les équations résultantes exprimées par les $g_1 g_2 \dots g_n$ systèmes de racines des équations données. Les équations résultantes ainsi exprimées peuvent s'écrire dans la forme des déterminants du degré $g_1 g_2 \dots g_n + 1$ égaux à zéro.

Pour éviter des calculs compliqués, nous ne donnerons pas à j des valeurs supérieures à $g_1 g_2 \dots g_n$.

Prenons $j = g_1 g_2 \dots g_n$; l'assemblant des systèmes de racines contiendra un nombre de $g_1 g_2 \dots g_n + 1$ déterminants qui renferment seulement les valeurs de deux variables désignées. Ces déterminants forment les coefficients de l'équation finale entre ces deux variables.

Nous verrons plus tard que tous ces déterminants ont pour commun facteur le déterminant de l'assemblant des systèmes de racines se composant des valeurs des mêmes variables, prenant $j = g_1 g_2 \dots g_n - 1$.

Construisons pour cette valeur de j une équation résultante qui contient outre les $g_1 g_2 \dots g_n$ arguments de la fonction F composés seulement de deux variables désignées, l'un des autres arguments; le coefficient de ce dernier argument est le déterminant de l'assemblant des systèmes de racines qui ne renferme que les valeurs de ces deux variables.

Il est clair que ce déterminant s'annule dans le cas où l'équation finale entre ces deux variables admet des systèmes de racines égaux.

Prenant $j < g_1 g_2 \dots g_n - 1$, tous les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines contiennent en général les valeurs de plus de deux variables; dans des cas particuliers il peut arriver que quelques-uns de ces déterminants s'annulent.

§ 7. Pour éclaircir ce qui a été dit dans les paragraphes précédents, prenons les deux équations homogènes du second degré à trois variables:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 xz + a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 xz + b_4 y^2 + b_5 yz + b_6 z^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (5).$$

Les coefficients de ces équations étant arbitraires, les quatre systèmes de racines de ces équations — x_i, y_i, z_i (i de 1 à 4) — sont indépendants, parce que 2 n'est pas inférieur à $g_1 + g_2 - n = 2$.

Prenant $j = g_1 g_2 = 4$, on peut former l'assemblant de la fonction F :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
$p_1 = x^4$	a_1						b_1						
$p_2 = x^3y$	a_2	a_1					b_2	b_1					
$p_3 = x^3z$	a_3		a_1				b_3		b_1				
$p_4 = x^2y^2$	a_4	a_2		a_1			b_4	b_2		b_1			
$p_5 = x^2yz$	a_5	a_3	a_2		a_1		b_5	b_3	b_2		b_1		
$p_6 = x^2z^2$	a_6		a_3			a_1	b_6		b_3			b_1	
$p_7 = xy^3$		a_4		a_2				b_4		b_2			
$p_8 = xy^2z$		a_5	a_4	a_3	a_2			b_5	b_4	b_3	b_2		
$p_9 = xyz^2$		a_6	a_5		a_3	a_2		b_6	b_5		b_3	b_2	
$p_{10} = xz^3$			a_6			a_3			b_6			b_3	
$p_{11} = y^4$				a_4						b_4			
$p_{12} = y^3z$				a_5	a_4					b_5	b_4		
$p_{13} = y^2z^2$				a_6	a_5	a_4				b_6	b_5	b_4	
$p_{14} = yz^3$					a_6	a_5					b_6	b_5	
$p_{15} = z^4$						a_6						b_6	

. (6),

et l'assemblant des systèmes de racines s' :

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
t_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$. . . (7).

En supprimant de l'assemblant (6) une colonne quelconque, p. ex. la sixième, on obtient l'assemblant des coefficients:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	
$p_1 = x^4$	a_1						b_1					
$p_2 = x^3y$	a_2	a_1					b_2	b_1				
$p_3 = x^3z$	a_3		a_1				b_3		b_1			
$p_4 = x^2y^2$	a_4	a_2		a_1			b_4	b_2		b_1		
$p_5 = x^2yz$	a_5	a_3	a_2		a_1		b_5	b_3	b_2		b_1	
$p_6 = x^2z^2$	a_6		a_3				b_6		b_3			b_1
$p_7 = xy^3$		a_4		a_2				b_4		b_2		
$p_8 = xy^2z$		a_5	a_4	a_3	a_2			b_5	b_4	b_3	b_2	
$p_9 = xyz^2$		a_6	a_5		a_3			b_6	b_5		b_3	b_2
$p_{10} = xz^3$			a_6						b_6			b_3
$p_{11} = y^4$				a_4						b_4		
$p_{12} = y^3z$				a_5	a_4				b_5	b_4		
$p_{13} = y^2z^2$				a_6	a_5				b_6	b_5	b_4	
$p_{14} = yz^3$					a_6					b_6	b_5	
$p_{15} = z^4$											b_6	

..... (8);

tous les déterminants de cet assemblant sont divisibles par b_6 , le déterminant de l'assemblant (7), qui est supplémentaire à tous les déterminants de l'assemblant (8).

Il suffira de mentionner entre les équations résultantes qui découlent de l'assemblant (8) l'équation finale entre y et z ¹⁾:

$${}^4p_{12,13,14,15}y^4 + {}^4p_{11,13,14,15}y^3z + {}^4p_{11,12,14,15}y^2z^2 + {}^4p_{11,12,13,15}yz^3 + {}^4p_{11,12,13,14}z^4 = 0 \dots\dots\dots (9),$$

et l'une des équations résultantes entre les trois variables x , y et z :

$$-{}^4p_{10,13,14,15}x^2y^2 + {}^4p_{4,13,14,15}xz^3 + {}^4p_{4,10,14,15}y^2z^2 + {}^4p_{4,10,13,15}yz^3 + p_{4,10,13,14}z^4 = 0 \dots\dots\dots (10).$$

Prenant $j = g_1 g_2 - 1 = 3$, on obtient l'assemblant des coefficients:

¹⁾ Dans les symboles qui représentent les déterminants d'un assemblant des coefficients nous indiquerons, quand il y en aura lieu, le degré de la fonction F par un chiffre placé à gauche du symbole. Nous procéderons de la même manière pour les symboles représentant les déterminants des systèmes de racines des équations données.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	
$p_1 = x^3$	a_1			b_1			
$p_2 = x^2y$	a_2	a_1		b_2	b_1		
$p_3 = x^2z$	a_3		a_1	b_3		b_1	
$p_4 = xy^2$	a_4	a_2		b_4	b_2		
$p_5 = xyz$	a_5	a_3	a_2	b_5	b_3	b_2 (11).
$p_6 = xz^2$	a_6		a_3	b_6		b_3	
$p_7 = y^3$		a_4			b_4		
$p_8 = y^2z$		a_5	a_4		b_5	b_4	
$p_9 = yz^2$		a_6	a_5		b_6	b_5	
$p_{10} = z^3$			a_6			b_6	

Les coefficients de l'équation finale (9) sont tous divisibles par ${}^3p_{7,8,9,10}$, outre par b_6 , facteur commun à tous les déterminants de l'assemblant (8).

De l'assemblant (11) on déduit plusieurs équations résultantes, e. a. :

$${}^3p_{6,8,9,10} xy^2 - {}^3p_{4,8,9,10} xz^2 + {}^3p_{4,6,9,10} y^2z + {}^3p_{4,6,8,10} yz^2 + {}^3p_{4,6,8,9} z^3 = 0 \dots\dots\dots (12).$$

Prenant $j = g_1 g_2 - 2 = 2$, on voit que l'assemblant des coefficients

	s_1	s_2	
$p_1 = x^2$	a_1	b_1	
$p_2 = xy$	a_2	b_2	
$p_3 = xz$	a_3	b_3 (13)
$p_4 = y^2$	a_4	b_4	
$p_5 = yz$	a_5	b_5	
$p_6 = z^2$	a_6	b_6	

ne renferme que deux colonnes. On peut déduire de cet assemblant plusieurs équations résultantes e. a. l'équation terminale :

$${}^2p_{3,4,5,6} xy + {}^2p_{2,4,5,6} xz + {}^2p_{2,3,5,6} y^2 + {}^2p_{2,3,4,6} yz + {}^2p_{2,3,4,5} z^2 = 0 \dots\dots\dots (14).$$

Les assemblants des systèmes de racines des équations données se rapportant aux différentes valeurs du degré de la fonction F sont les suivants :

	q_1	q_2	q_3	q_4	
x^4	x_1^4	x_2^4	x_3^4	x_4^4	
x^3y	$x_1^3y_1$	$x_2^3y_2$	$x_3^3y_3$	$x_4^3y_4$	
x^3z	$x_1^3z_1$	$x_2^3z_2$	$x_3^3z_3$	$x_4^3z_4$	
x^2y^2	$x_1^2y_1^2$	$x_2^2y_2^2$	$x_3^2y_3^2$	$x_4^2y_4^2$	
x^2yz	$x_1^2y_1z_1$	$x_2^2y_2z_2$	$x_3^2y_3z_3$	$x_4^2y_4z_4$	
x^2z^2	$x_1^2z_1^2$	$x_2^2z_2^2$	$x_3^2z_3^2$	$x_4^2z_4^2$	
xy^3	$x_1y_1^3$	$x_2y_2^3$	$x_3y_3^3$	$x_4y_4^3$	
xy^2z	$x_1y_1^2z_1$	$x_2y_2^2z_2$	$x_3y_3^2z_3$	$x_4y_4^2z_4$ (15),
xyz^2	$x_1y_1z_1^2$	$x_2y_2z_2^2$	$x_3y_3z_3^2$	$x_4y_4z_4^2$	
xz^3	$x_1z_1^3$	$x_2z_2^3$	$x_3z_3^3$	$x_4z_4^3$	
y^4	y_1^4	y_2^4	y_3^4	y_4^4	
y^3z	$y_1^3z_1$	$y_2^3z_2$	$y_3^3z_3$	$y_4^3z_4$	
y^2z^2	$y_1^2z_1^2$	$y_2^2z_2^2$	$y_3^2z_3^2$	$y_4^2z_4^2$	
yz^3	$y_1z_1^3$	$y_2z_2^3$	$y_3z_3^3$	$y_4z_4^3$	
z^4	z_1^4	z_2^4	z_3^4	z_4^4	

	q_1	q_2	q_3	q_4	
x^3	x_1^3	x_2^3	x_3^3	x_4^3	
x^2y	$x_1^2y_1$	$x_2^2y_2$	$x_3^2y_3$	$x_4^2y_4$	
x^2z	$x_1^2z_1$	$x_2^2z_2$	$x_3^2z_3$	$x_4^2z_4$	
xy^2	$x_1y_1^2$	$x_2y_2^2$	$x_3y_3^2$	$x_4y_4^2$	
xyz	$x_1y_1z_1$	$x_2y_2z_2$	$x_3y_3z_3$	$x_4y_4z_4$	
xz^2	$x_1z_1^2$	$x_2z_2^2$	$x_3z_3^2$	$x_4z_4^2$ (16),
y^3	y_1^3	y_2^3	y_3^3	y_4^3	
y^2z	$y_1^2z_1$	$y_2^2z_2$	$y_3^2z_3$	$y_4^2z_4$	
yz^2	$y_1z_1^2$	$y_2z_2^2$	$y_3z_3^2$	$y_4z_4^2$	
z^3	z_1^3	z_2^3	z_3^3	z_4^3	

	q_1	q_2	q_3	q_4	
x^2	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_4^2	
xy	x_1y_1	x_2y_2	x_3y_3	x_4y_4	
xz	x_1z_1	x_2z_2	x_3z_3	x_4z_4 (17).
y^2	y_1^2	y_2^2	y_3^2	y_4^2	
yz	y_1z_1	y_2z_2	y_3z_3	y_4z_4	
z^2	z_1^2	z_2^2	z_3^2	z_4^2	

L'assemblant (15) contient les cinq déterminants ${}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}$, ${}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12}$, ${}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13}$, ${}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,14}$, ${}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,15}$ qui ne se composent que des valeurs des deux variables y et z . Ces cinq déterminants sont divisibles par le déterminant ${}^3X_{1,2,3,4,5,6}$ de l'assemblant (16) qui renferme seulement les valeurs des mêmes variables.

De l'assemblant (15) on déduit l'équation finale entre y et z :

$${}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} y^4 - {}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12} y^3 z + {}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13} y^2 z^2 - {}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,14} y z^3 + {}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,15} z^4 = 0 \dots\dots (18),$$

$$\text{ou} \left| \begin{array}{ccccc} y^4 & y_1^4 & y_2^4 & y_3^4 & y_4^4 \\ y^3 z & y_1^3 z_1 & y_2^3 z_2 & y_3^3 z_3 & y_4^3 z_4 \\ y^2 z^2 & y_1^2 z_1^2 & y_2^2 z_2^2 & y_3^2 z_3^2 & y_4^2 z_4^2 \\ y z^3 & y_1 z_1^3 & y_2 z_2^3 & y_3 z_3^3 & y_4 z_4^3 \\ z^4 & z_1^4 & z_2^4 & z_3^4 & z_4^4 \end{array} \right| = 0 \dots\dots (19),$$

qui est la même que l'équation (9), et l'équation résultante entre x , y et z :

$${}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12} x^2 y^2 - {}^4X_{1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12} x z^3 + {}^4X_{1,2,3,5,6,7,8,9,11,12,13} y^2 z^2 - {}^4X_{1,2,3,5,6,7,8,9,11,12,14} y z^3 + {}^4X_{1,2,3,5,6,7,8,9,11,12,15} z^4 = 0 \dots\dots (20),$$

$$\text{ou} \left| \begin{array}{ccccc} x^2 y^2 & x_1^2 y_1^2 & x_2^2 y_2^2 & x_3^2 y_3^2 & x_4^2 y_4^2 \\ x z^3 & x_1 z_1^3 & x_2 z_2^3 & x_3 z_3^3 & x_4 z_4^3 \\ y^2 z^2 & y_1^2 z_1^2 & y_2^2 z_2^2 & y_3^2 z_3^2 & y_4^2 z_4^2 \\ y z^3 & y_1 z_1^3 & y_2 z_2^3 & y_3 z_3^3 & y_4 z_4^3 \\ z^4 & z_1^4 & z_2^4 & z_3^4 & z_4^4 \end{array} \right| = 0 \dots\dots (21),$$

identique à l'équation (10).

De l'assemblant (16) on peut déduire l'équation résultante :

$${}^3X_{1,2,3,4,5,7}xy^2 - {}^3X_{1,2,3,5,6,7}xz^2 + {}^3X_{1,2,3,5,7,8}y^2z - {}^3X_{1,2,3,5,7,9}yz^2 \\ + {}^3X_{1,2,3,5,7,10}z^3 = 0 \dots\dots\dots (22),$$

$$\text{ou} \left| \begin{array}{ccccc} xy^2 & x_1y_1^2 & x_2y_2^2 & x_3y_3^2 & x_4y_4^2 \\ xz^2 & x_1z_1^2 & x_2z_2^2 & x_3z_3^2 & x_4z_4^2 \\ y^2z & y_1^2z_1 & y_2^2z_2 & y_3^2z_3 & y_4^2z_4 \\ yz^2 & y_1z_1^2 & y_2z_2^2 & y_3z_3^2 & y_4z_4^2 \\ z^3 & z_1^3 & z_2^3 & z_3^3 & z_4^3 \end{array} \right| = 0 \dots\dots\dots (23),$$

identique à l'équation (12).

De l'assemblant (17) découle l'équation terminale :

$${}^2X_{1,2}xy - {}^2X_{1,3}xz + {}^2X_{1,4}y^2 - {}^2X_{1,5}yz + {}^2X_{1,6}z^2 = 0 \dots\dots\dots (24),$$

$$\text{ou} \left| \begin{array}{ccccc} xy & x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 \\ xz & x_1z_1 & x_2z_2 & x_3z_3 & x_4z_4 \\ y^2 & y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 \\ yz & y_1z_1 & y_2z_2 & y_3z_3 & y_4z_4 \\ z^2 & z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 \end{array} \right| = 0 \dots\dots\dots (25),$$

qui est la même que l'équation (14).

Le théorème des assemblants supplémentaires du § 4 s'exprime pour les différentes valeurs du degré de la fonction F par les égalités suivantes :

$$\frac{{}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}}{{}^4p_{12,13,14,15}} = \frac{{}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12}}{{}^4p_{11,13,14,15}} \\ = \frac{{}^4X_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12}}{{}^4p_{10,13,14,15}} = \text{etc} \dots\dots\dots (26),$$

$$\frac{{}^3X_{1,2,3,4,5,6}}{{}^3p_{7,8,9,10}} = \frac{{}^3X_{1,2,3,4,5,9}}{{}^3p_{6,7,8,10}} = \frac{{}^3X_{1,2,3,4,5,7}}{{}^3p_{6,8,9,10}} = \text{etc} \dots\dots\dots (27),$$

$$\frac{{}^2X_{1,2}}{{}^2p_{3,4,5,6}} = \frac{{}^2X_{1,3}}{{}^2p_{2,4,5,6}} = \frac{{}^2X_{2,4}}{{}^2p_{1,3,5,6}} = \text{etc} \dots\dots\dots (28).$$

§ 8. Le théorème des assemblants supplémentaires conduit encore aux théorèmes suivants :

1. Il est impossible que tous les déterminants de l'assemblant des coefficients s'annulent.

Pour le démontrer, nous renvoyons aux démonstrations des § 2—9 de notre mémoire „L'équation finale.”

Si tous les déterminants de l'assemblant des coefficients s'annulaient, il existerait au moins un système de racines s' satisfaisant à toutes les équations θ , outre les $v_2 - v_3 + v_4 \dots + (-1)^n v_n$ systèmes de racines indépendants qui satisfont déjà à ces équations.

Cela étant impossible, tous les déterminants de l'assemblant des coefficients ne peuvent s'évanouir.

Le cas où quelques déterminants de l'assemblant des coefficients s'évanouissent, se présente, quand le nombre des termes d'une ou de plusieurs des fonctions ϕ est inférieur au nombre des termes des équations résultantes, ou, si l'on a $\binom{g_p + n}{n} < g_1 g_2 \dots g_n + 1$ pour une ou plusieurs valeurs de p .

Les équations résultantes renfermant parmi leurs coefficients les déterminants qui s'annulent, se ramènent dans ce cas à des équations d'un degré inférieur au degré adopté pour la fonction F , et elles contiennent un nombre de termes inférieur à $g_1 g_2 \dots g_n + 1$.

2. Tous les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines des équations données peuvent s'annuler.

Cela peut se présenter dans les deux cas suivants:

I. Pour toute valeur du degré de la fonction F , si les systèmes de racines des équations données ne sont pas tous différents;

II. Pour des valeurs du degré de la fonction F inférieures à $\sum_1^n g_K - n$.

Dans le premier cas, les systèmes de racines doubles ou multiples satisfont aussi bien aux équations données qu'à une équation homogène du degré $\sum_1^n g_K - n$.

Pour le démontrer, rappelons-nous que les variations simultanées des variables d'un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables sont proportionnelles aux valeurs qu'elles ont déjà obtenues. Partant de la propriété connue de la fonction homogène $f(x, y, z, u, \dots)$ du $n^{ième}$ degré, exprimée par l'équation:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + u \frac{\partial f}{\partial u} + \dots = n f(x, y, z, u, \dots) \dots \quad (29),$$

on peut écrire le système d'équations (2) comme suit:

Employant la notation connue A_1, A_2, \dots, A_{n+1} pour les déterminants de l'assemblant (32), on obtient par la résolution des systèmes d'équations (30) et (31) les égalités :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{A_1} &= \frac{y}{-A_2} = \frac{z}{A_3} = \frac{u}{-A_4} = \text{etc.} \\ \frac{dx}{A_1} &= \frac{dy}{-A_2} = \frac{dz}{A_3} = \frac{du}{-A_4} = \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33),$$

d'où l'on peut déduire immédiatement :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u} = \text{etc.} \dots \dots \dots (34).$$

Deux systèmes de racines $(x_1, y_1, z_1, u_1, \dots)$ et $(x_2, y_2, z_2, u_2, \dots)$ pouvant devenir égaux, les différences $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, u_1 - u_2; \dots$ substituées aux variations simultanées dx, dy, dz, du, \dots dans les équations (31), doivent rendre ces équations identiques. Ces substitutions faites, retranchons les équations (31) respectivement des équations (30); on verra que deux systèmes de racines différents satisfont aux équations (30), tandis que les coefficients ne changent pas de valeurs.

Pour que ce soit possible, il faut que tous les déterminants de l'assemblant (32) s'évanouissent ¹⁾. Cependant, il suffit qu'un seul de ces déterminants soit nul, car on peut déduire de la première équation (33) que tous les déterminants de l'assemblant fonctionnel s'annulent, quand c'est le cas avec l'un d'entre eux.

En égalant à zéro l'un des déterminants de l'assemblant fonctionnel qui ne s'annule pas identiquement, on obtient une équation du degré $\sum_1^n g_K - n$, qui devient identique en substituant aux variables les systèmes de racines doubles ou multiples des n équations données,

Les systèmes de racines doubles ou multiples des équations données sont donc les solutions communes de $n + 1$ équations homogènes à $n + 1$ variables, qu'on peut évaluer suivant les méthodes mentionnées dans notre mémoire „Théorie générale de l'élimination.”

Dans le cas cité au commencement de cet article sub II le théorème des assemblants supplémentaires est encore applicable pour $i < \sum_1^n g_K - n$, mais il faut supprimer dans ce cas de l'assemblant des systèmes de racines les colonnes qu'on peut regarder comme dépendantes des autres colonnes.

¹⁾ Comparer: Théorie générale de l'élimination § 21.

3. Si quelques déterminants de l'assemblant des coefficients s'évanouissent, les déterminants supplémentaires de l'assemblant des systèmes de racines s'annulent aussi; et réciproquement, si les équations données n'ont pas de systèmes de racines égaux, et que quelques déterminants de l'assemblant des systèmes de racines s'évanouissent, les déterminants supplémentaires de l'assemblant des coefficients s'annulent également.

Ce théorème découle directement du rapport constant entre les déterminants supplémentaires des deux assemblants supplémentaires.

4. Si un nombre inférieur à $g_1 g_2 \dots g_n + 1$ lignes de l'assemblant des systèmes de racines sont liées par une relation linéaire, tout déterminant de cet assemblant qui contient ces lignes, s'annule; et réciproquement, si tous les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines qui ont $g_1 g_2 \dots g_n - k + 1$ lignes communes, s'annulent, il existe une relation linéaire entre ces $g_1 g_2 \dots g_n - k + 1$ lignes.

La première partie de ce théorème est évidente, la seconde partie découle des équations résultantes qui existent entre $g_1 g_2 \dots g_n + 1$ arguments quelconques de la fonction F . Pour obtenir cette relation linéaire, on forme une équation résultante contenant parmi ces coefficients k des déterminants qui s'annulent.

5. Si n équations homogènes à $n + 1$ variables ont en tout $g_1 g_2 \dots g_n - k$ systèmes de racines différents, et que l'on forme de la manière connue un assemblant de ces systèmes de racines, les lignes de cet assemblant sont liées par k relations linéaires, et en outre par les $v_1 - v_2 + v_3 + \dots + (-1)^{n-1} v_n$ relations linéaires existant déjà entre ces lignes; toutes $g_1 g_2 \dots g_n - k + 1$ lignes de cet assemblant sont dans ce cas liées par une relation linéaire.

Ce théorème découle de la théorie exposée dans le numéro précédent, si on la compare aux conditions nécessaires pour l'existence de k solutions communes d'un système de $n + 1$ équations homogènes à $n + 1$ variables ¹⁾.

Si les n équations données admettent en tout $g_1 g_2 \dots g_n - k$ systèmes de racines différents, les k systèmes de racines égaux à d'autres systèmes de racines de ces équations satisfont encore à une équation homogène du degré $\sum_1^n g_K - n$. Le système de $n + 1$ équations homogènes formé par cette équation et les n équations don-

¹⁾ Voir: Théorie générale de l'élimination, § 112 et § 115.

nées admet dans ce cas k solutions communes. Pour que ce soit possible, il faut que les lignes de l'assemblant de la fonction F qui se rapporte à ce système de $n + 1$ équations homogènes soient liées par k relations linéaires indépendantes. Ces k relations linéaires augmentent donc le nombre des relations linéaires existant déjà entre les lignes de l'assemblant des systèmes de racines des équations données.

La dernière partie de ce théorème est un corollaire de la première.

§ 9. Les théorèmes du paragraphe précédent fournissent le caractère distinctif de l'égalité des systèmes de racines de l'équation finale entre deux variables désignées, et en plus une méthode pour évaluer les systèmes de racines doubles ou multiples de cette équation.

Si k systèmes de racines de l'équation finale entre deux variables désignées sont égaux à d'autres systèmes de racines de cette équation, de sorte que le nombre de ses systèmes de racines différents est $g_1 g_2 \dots g_n - k$, toutes $g_1 g_2 \dots g_n - k + 1$ lignes de l'assemblant des systèmes de racines des équations données qui renferment seulement les valeurs de ces deux variables, sont liées par une relation linéaire (Voir § 18).

Dans ce cas, tout déterminant de cet assemblant s'annule, quand il renferme $g_1 g_2 \dots g_n - k + 1$ lignes composées seulement des valeurs des deux variables désignées, et son déterminant supplémentaire de l'assemblant des coefficients s'évanouit également.

Réciproquement, l'équation finale entre deux variables désignées a en tout $g_1 g_2 \dots g_n - k$ systèmes de racines différents, quand ces déterminants de l'assemblant des coefficients s'annulent qui se rapportent aux déterminants supplémentaires de l'assemblant des systèmes de racines qui ont $g_1 g_2 \dots g_n - k + 1$ lignes communes composées seulement des valeurs de ces mêmes variables.

Ce résultat devient illusoire, quand les équations admettent des systèmes de racines égaux.

Dans ce cas on n'obtiendrait pas de résultat, car tous les déterminants de l'assemblant des systèmes de racines s'annuleraient, tandis que les déterminants de l'assemblant des coefficients auraient en général des valeurs différant de zéro.

§ 10. Appliquons la théorie précédente à un exemple général et supposons que les équations données n'admettent pas de systèmes de racines égaux.

Prenant $j = g_1 g_2 \dots g_n - 1$, l'assemblant des coefficients ne contient qu'un seul déterminant qui renferme les valeurs de deux variables désignées. Pour que l'équation finale entre ces variables

contienne des systèmes de racines égaux, il faut que ce déterminant s'annule. Il doit en être de même du déterminant supplémentaire de l'assemblant des coefficients, et réciproquement.

Formons pour la même valeur de j une équation résultante dont tous les termes à un près renferment des arguments de la fonction F composés seulement des deux variables désignées, tandis que le terme restant renferme encore une autre variable. Le coefficient de ce terme est précisément le déterminant en question, qui s'annule, si l'équation finale a des systèmes de racines égaux.

L'équation résultante qui nous occupe, se ramène dans ce cas à une équation de deux variables d'un degré inférieur d'une unité au produit des degrés des équations données. Les systèmes de racines de cette équation sont alors les $g_1 g_2 \dots g_n - 1$ systèmes de racines différents de l'équation finale entre les mêmes variables.

§ 11. Dans le cas où deux systèmes de racines de l'équation finale sont égaux, — sans que ce soit le cas des autres variables — on peut évaluer le système de racines double de l'équation finale de la manière suivante.

La plus petite valeur qu'on puisse donner à j dans cette évaluation est $g_1 g_2 \dots g_n - 2$.

Formons pour cette valeur de j une équation terminale contenant $g_1 g_2 \dots g_n - 1$ termes qui renferment seulement les deux variables de l'équation finale, et deux termes qui ont pour diviseur un binôme du premier degré entre les mêmes variables. Ce binôme, égalé à zéro, fournit une équation qui a pour racines le système de racines double de l'équation finale. Le polynôme formé par les autres termes de l'équation terminale considérée est dans ce cas divisible par le même binôme.

Pour le démontrer, remarquons que l'équation terminale en question devient identique pour deux valeurs différentes d'une troisième variable, tandis que les deux autres variables conservent leurs valeurs. Pour que ce soit possible, il faut — ordonnant cette équation suivant les puissances descendantes de la troisième variable — que les coefficients de ses deux termes s'annulent pour les valeurs considérées des deux autres variables. *C. Q. F. D.*

§ 12. Si parmi les systèmes de racines de l'équation finale entre deux variables désignées se trouvent deux systèmes de racines égaux à d'autres systèmes de racines de cette équation, et qui ne se rapportent pas à des valeurs égales des autres variables, de sorte que le nombre des systèmes de racines différents de l'équation finale considérée est $g_1 g_2 \dots g_n - 2$, les deux coefficients du binôme considéré dans le paragraphe précédent s'annulent.

C'est le caractère auquel on reconnaît, si deux systèmes de racines de l'équation finale sont égaux à d'autres systèmes de racines de cette équation.

Les termes restants de l'équation terminale qui nous occupe, forment une équation entre les deux variables désignées dont le degré est inférieur de deux unités au produit des degrés des équations données. Cette équation a pour racines les $g_1 g_2 \dots g_n - 2$ systèmes de racines différents de l'équation finale entre les mêmes variables.

Ce qui a été dit dans ce paragraphe s'éclaircit en exprimant les coefficients de l'équation terminale considérée par les systèmes de racines des équations données. Les coefficients des termes qui renferment la troisième variable sont des déterminants qui contiennent $g_1 g_2 \dots g_n - 1$ lignes entre lesquelles il existe une relation linéaire (Voir § 18).

§ 13. Pour évaluer dans le cas du paragraphe précédent l'équation dont les racines sont les systèmes de racines de l'équation finale qui sont égaux à d'autres systèmes de racines de cette équation, on peut diminuer encore le degré de la fonction F d'une unité.

Prenant $j = g_1 g_2 \dots g_n - 3$, constituons une équation terminale contenant $g_1 g_2 \dots g_n - 2$ termes qui renferment seulement les deux variables désignées, et trois termes qui ont pour facteur un trinôme du second degré entre les mêmes variables. Ce trinôme, égalé à zéro, fournit une équation du second degré dont les systèmes de racines sont précisément les deux systèmes de racines de l'équation finale égaux à d'autres systèmes de racines de cette équation.

Le polynôme formé par les autres termes de l'équation terminale en question est divisible par le même trinôme, ou, si ce trinôme est un carré parfait, par la racine carrée de ce trinôme.

La démonstration de ces faits est la même que celle du § 11.

§ 14. Si le nombre des systèmes de racines différents de l'équation finale entre deux variables désignées est encore inférieur à $g_1 g_2 \dots g_n - 2$, tous les coefficients du trinôme considéré dans le paragraphe précédent s'annulent.

C'est le caractère qui fait reconnaître si plus de deux systèmes de racines de l'équation finale sont égaux à d'autres systèmes de racines de cette équation, sans que les valeurs des autres variables des équations données soient égales.

Il est clair que l'application de cette théorie peut se continuer.

Pour conclure, évaluons la plus petite valeur qu'on puisse donner

au degré de la fonction F , si l'on veut obtenir une équation terminale par laquelle on peut déterminer la troisième variable.

Si le degré de la fonction F est j , elle contient $j + 1$ termes renfermant seulement deux variables désignées, et j termes contenant, à part les mêmes variables, une troisième variable au premier degré. Le nombre total, $2j + 1$, de ces termes ne peut être supérieur à $g_1 g_2 \dots g_n + 1$, le nombre des termes d'une équation résultante. Il résulte de là que le degré de la fonction F dans ce cas ne peut pas être pris inférieur à $\frac{1}{2} g_1 g_2 \dots g_n$.

§ 15. La propriété que les déterminants de l'assemblant fonctionnel de n équations homogènes à $n + 1$ variables s'annulent en substituant aux variables les éléments des systèmes de racines doubles ou multiples de ces équations, explique pourquoi le déterminant fonctionnel ou le jacobien de n équations homogènes à n variables doit s'évanouir pour les valeurs des variables satisfaisant à toutes ces équations.

On peut considérer un tel système d'équations comme un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables dont l'une des variables a la valeur de zéro. Les solutions communes de n équations homogènes à n variables sont donc les systèmes de racines doubles ou multiples de n équations homogènes à $n + 1$ variables, la dernière variable ayant la valeur de zéro.

Si les n équations homogènes à n variables sont de degrés égaux, les dérivées partielles du jacobien s'annulent aussi pour les valeurs considérées des variables ¹⁾. Ce n'est pas le cas avec les dérivées des déterminants de l'assemblant fonctionnel, ce qui se prouve facilement.

I. Une équation homogène à deux variables.

1. Nombre des systèmes de racines indépendants.

§ 16. Soit

$$\varphi(x, y) \equiv a_1 x^n + a_2 x^{n-1} y + a_3 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n+1} y^n = 0 \dots \quad (35)$$

l'équation donnée du degré n .

Le nombre des systèmes de racines est, comme on sait, égal à n .

¹⁾ Voir: G. SALMON, Leçons d'Algèbre Supérieure, n° 89.

En substituant dans l'équation donnée aux variables les n systèmes de racines (qu'on peut supposer différents), on obtient entre les $n + 1$ coefficients de l'équation donnée n équations linéaires homogènes qui suffisent précisément pour la détermination des $n + 1$ coefficients.

Dans le cas où il y a une seule équation homogène à deux variables il n'existe donc pas de systèmes de racines superflus.

Si l'équation donnée a des systèmes de racines égaux, de sorte que le nombre total des systèmes de racines différents est $n - k$, les coefficients de l'équation donnée ne sont pas indépendants, mais liés par k relations. Les lignes de l'assemblant des systèmes de racines différents, prenant $j = n$, sont dans ce cas liées par $k + 1$ relations linéaires indépendantes, comme il sera démontré dans la suite de ce chapitre.

2. Cas où tous les systèmes de racines sont différents.

§ 17. Les n systèmes de racines de l'équation donnée (35) forment l'assemblant :

$$\left| \begin{array}{cccccc} x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n & \\ x_1^{n-1}y_1 & x_2^{n-1}y_2 & x_3^{n-1}y_3 & \dots & x_n^{n-1}y_n & \\ x_1^{n-2}y_1^2 & x_2^{n-2}y_2^2 & x_3^{n-2}y_3^2 & \dots & x_n^{n-2}y_n^2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ y_1^n & y_2^n & y_3^n & \dots & y_n^n & \end{array} \right| \dots \dots \dots (36).$$

Cet assemblant contient $n + 1$ lignes et n colonnes. Les lignes sont liées par une seule relation linéaire (l'équation donnée (35)), donc les colonnes sont indépendantes entre elles.

Indiquant les déterminants de l'assemblant (36) par X_1, X_2 , etc., on obtient l'égalité :

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{-a_2} = \frac{X_3}{a_3} = \dots = \frac{X_{n+1}}{(-1)^n a_{n+1}} \dots \dots \dots (37).$$

En substituant les valeurs des coefficients tirées de cette égalité, dans l'équation donnée (35) cette équation peut s'écrire dans la forme :

$$X_1 x^n - X_2 x^{n-1}y + X_3 x^{n-2}y^2 - \dots + (-1)^n X_{n+1} y^n = 0 \dots (38),$$

$$\text{ou} \quad \begin{vmatrix} x'' & x_1'' & x_2'' & \dots & x_n'' \\ x^{n-1}y & x_1^{n-1}y_1 & x_2^{n-1}y_2 & \dots & x_n^{n-1}y_n \\ x^{n-2}y^2 & x_1^{n-2}y_1^2 & x_2^{n-2}y_2^2 & \dots & x_n^{n-2}y_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^n & y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{vmatrix} = 0 \dots (39).$$

Les déterminants de l'assemblant (36) sont tous divisibles par le déterminant ¹⁾:

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2}y_1 & x_2^{n-2}y_2 & \dots & x_n^{n-2}y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \dots (40),$$

ce qu'on peut déduire de l'égalité (37).

Comme les déterminants X_1 et X_{n+1} sont divisibles par le déterminant (40), les déterminants X_2 , X_3 , etc. doivent renfermer également ce facteur.

Les systèmes de racines de l'équation (35) étant tous différents, le déterminant (40) ne s'annule pas. Dans ce cas on peut diviser l'équation (38) par le déterminant (40), d'où l'on obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & y_1 y_2 \dots y_n x^n - (x_1 y_2 y_3 \dots y_n + x_2 y_1 y_3 \dots y_n + \dots + x_n y_1 y_2 \dots y_{n-1}) x^{n-1} y \\ & + (x_1 x_2 y_3 \dots y_n + x_1 x_3 y_2 \dots y_n + \dots + x_{n-1} x_n y_1 \dots y_{n-2}) x^{n-2} y^2 - \text{etc.} \\ & + (-1)^{n-1} (x_2 x_3 \dots x_n y_1 + x_1 x_3 \dots x_n y_2 + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n) x y^{n-1} \\ & + (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n y^n = 0 \dots (41), \end{aligned}$$

qui nous conduit aux théorèmes attribués à Viète.

L'équation (41) peut se réduire à

$$(y_1 x - x_1 y) (y_2 x - x_2 y) (y_3 x - x_3 y) \dots (y_n x - x_n y) = 0 \dots (42),$$

qu'on peut obtenir aussi de l'équation (39) en appliquant les théorèmes connus des déterminants.

3. Cas où quelques systèmes de racines sont égaux.

§ 18. Si l'équation (35) admet des systèmes de racines égaux,

¹⁾ Comparer: Dr. PAUL GORDAN's Vorlesungen über Invariantentheorie, tome premier, § 165.

le déterminant (40) et tous les déterminants de l'assemblant (36) s'annulent; et réciproquement, si le déterminant (40) s'annule, l'équation (35) aura des systèmes de racines égaux, et tous les déterminants de l'assemblant (36) s'évanouiront également.

Si le déterminant (40) s'annule, il existe entre les lignes de cet assemblant au moins une relation linéaire. Les n systèmes de racines de l'équation (35) satisfont donc à une même équation homogène du degré $n - 1$. Il s'ensuit qu'au moins deux de ses systèmes de racines doivent être égaux. Les lignes de l'assemblant (36) sont dans ce cas liées par plusieurs relations linéaires.

Si l'équation (35) a en tout $n - k$ systèmes de racines différents, toutes $n - k + 1$ lignes consécutives de l'assemblant (36) sont liées par la même relation linéaire.

Pour le démontrer, formons de la manière connue l'assemblant des systèmes de racines, prenant $n - k$ pour le degré de la fonction F . Cet assemblant contient $n - k + 1$ lignes et n colonnes. Dans le cas en question tout déterminant de cet assemblant s'annule car il contient au moins deux colonnes identiques. Les lignes de cet assemblant sont donc liées par une relation linéaire. La même relation existe évidemment aussi entre toutes $n - k + 1$ lignes de l'assemblant (36).

Il est clair que les coefficients de cette relation linéaire sont les coefficients de l'équation du $n - k^{\text{ième}}$ degré qui a pour racines précisément les $n - k$ systèmes de racines différents de l'équation donnée.

§ 19. Si l'équation (35) a en tout $n - k$ systèmes de racines différents, les coefficients de cette équation sont liés par k relations.

Pour obtenir ces relations il faut évaluer les k systèmes de racines doubles ou multiples de l'équation donnée, qui sont, comme on sait, les solutions communes des deux équations:

$$\left. \begin{aligned} na_1 x^{n-1} + (n-1)a_2 x^{n-2}y + (n-2)a_3 x^{n-3}y^2 + \dots + a_n y^{n-1} &= 0 \\ a_2 x^{n-1} + 2a_3 x^{n-2}y + 3a_4 x^{n-3}y^2 + \dots + na_{n+1} y^{n-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot (43),$$

que l'on obtient en différentiant l'équation (35) par rapport à x et à y .

Si les équations (43) admettent une ou plusieurs solutions communes, le résultant de ces équations doit s'annuler.

Constituons pour rechercher les solutions communes des équations (43) les assemblants de la fonction F de ces équations, prenant successivement pour le degré de cette fonction $2n - 3$, $2n - 4$, $2n - 5$,

etc., et notons les déterminants de ces assemblants respectivement par A, B, C, D , etc. ¹⁾

Pour $k = 1$, le seul déterminant de l'assemblant A s'annule, et la solution commune s'obtient de l'équation :

$$B_2 x + B_1 y = 0 \dots\dots\dots (44).$$

Pour $k = 2$, tous les déterminants de l'assemblant B s'annulent (ce qui est le cas, si deux de ces déterminants s'évanouissent), et les solutions communes sont déterminées par l'équation du second degré :

$$C_{2,3} x^2 + C_{1,3} xy + C_{1,2} y^2 = 0 \dots\dots\dots (45).$$

Pour $k = 3$, tous les déterminants de l'assemblant C s'annulent (ce qui est le cas, si trois de ces déterminants s'évanouissent), et les solutions communes s'obtiennent par la résolution de l'équation du troisième degré :

$$D_{2,3,4} x^3 + D_{1,3,4} x^2 y + D_{1,2,4} xy^2 + D_{1,2,3} y^3 = 0 \dots\dots\dots (46),$$

etc.

Pour $k = n - 1$, les deux équations (43) ne forment qu'une seule équation. De là on peut déduire que l'on aura dans ce cas

$$a_1 = \text{un nombre arbitraire}, a_2 = \frac{n}{1} \lambda a_1, a_3 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \lambda^2 a_1, \text{ etc.}$$

$a_{n+1} = \binom{n}{n} \lambda^n a_1$, où λ représente le rapport constant qui existe entre les termes correspondants des deux équations (43). Le premier membre de l'équation (35) se réduit dans ce cas à la $n^{\text{ième}}$ puissance du binôme $x + \lambda y$, multipliée par a_1 .

En divisant l'équation (35) par l'équation qui fournit les k solutions communes des équations (43), on obtient l'équation du $n - k^{\text{ième}}$ degré qui a pour racines les $n - k$ systèmes de racines différents de l'équation donnée (35).

Les coefficients de cette équation forment les coefficients de la relation linéaire qui existe entre toutes $n - k + 1$ lignes consécutives de l'assemblant (36).

§ 20. Appliquons cette théorie à l'équation du quatrième degré :

$$a_1 x^4 + a_2 x^3 y + a_3 x^2 y^2 + a_4 x y^3 + a_5 y^4 = 0 \dots\dots\dots (47).$$

¹⁾ Voir: Théorie générale de l'élimination, § 87.

Pourque cette équation ait des systèmes de racines égaux, il faut que

$$A \equiv \begin{vmatrix} 4a_1 & & a_2 & & & \\ 3a_2 & 4a_1 & 2a_3 & a_2 & & \\ 2a_3 & 3a_2 & 4a_1 & 3a_4 & 2a_3 & a_2 \\ a_4 & 2a_3 & 3a_2 & 4a_5 & 3a_4 & 2a_3 \\ & a_4 & 2a_3 & & 4a_5 & 3a_4 \\ & & a_4 & & & 4a_5 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (48).$$

Le système de racines double est déterminé par l'équation (44), où B_1 et B_2 représentent deux déterminants désignés de l'assemblant

$$B \equiv \begin{vmatrix} 4a_1 & & a_2 & & & \\ 3a_2 & 4a_1 & 2a_3 & a_2 & & \\ 2a_3 & 3a_2 & 3a_4 & 2a_3 & & \\ a_4 & 2a_3 & 4a_5 & 3a_4 & & \\ & a_4 & & 4a_5 & & \end{vmatrix} \dots\dots\dots (49).$$

Si les déterminants B_1 et B_2 s'annulent, les systèmes de racines multiples s'obtiennent de l'équation (45), où $C_{2,3}$, $C_{1,3}$ et $C_{1,2}$ représentent trois déterminants désignés de l'assemblant

$$C \equiv \begin{vmatrix} 4a_1 & a_2 & & & \\ 3a_2 & 2a_3 & & & \\ 2a_3 & 3a_4 & & & \\ a_4 & 4a_5 & & & \end{vmatrix} \dots\dots\dots (50).$$

Si les déterminants de l'assemblant C s'annulent, tous les systèmes de racines de l'équation (47) sont égaux, et le premier membre de cette équation se ramène à la quatrième puissance d'un binôme entre x et y du premier degré.

II. Deux équations homogènes à trois variables.

1. Nombre des systèmes de racines superflus.

§ 21. Soient

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z) &\equiv a_1 x^l + a_2 x^{l-1}y + a_3 x^{l-1}z + a_4 x^{l-2}y^2 + a_5 x^{l-2}yz \\ &\quad + a_6 x^{l-2}z^2 + a_7 x^{l-3}y^3 + \dots + a_{\binom{l+2}{2}} z^l = 0, \\ \chi(x, y, z) &\equiv b_1 x^m + b_2 x^{m-1}y + b_3 x^{m-1}z + b_4 x^{m-2}y^2 + b_5 x^{m-2}yz \\ &\quad + b_6 x^{m-2}z^2 + b_7 x^{m-3}y^3 + \dots + b_{\binom{m+2}{2}} z^m = 0, \end{aligned} \right\} \dots \quad (51)$$

les équations données, respectivement des degrés l et m , où $l \geq m$.

Prenant l pour le degré de la fonction F , on obtient les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} v &= \binom{l+2}{2} \\ v_1 &= 1 + \binom{l-m+2}{2} \\ v_2 &= \binom{-m+2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \quad (52).$$

On peut tirer de ces valeurs les conclusions suivantes ¹⁾ :

1. Si $m \leq 2$, les lm systèmes de racines des équations données sont indépendants ;

2. Si $m > 2$, le nombre des systèmes de racines superflus est

$$v_2 = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} = \binom{m-1}{2} \dots \quad (53).$$

Exemples : Pour $l = 3$, $m = 3$, on trouve $v_2 = 1$,
 „ $l = 4$, $m = 3$, „ „ $v_2 = 1$,
 „ $l = 4$, $m = 4$, „ „ $v_2 = 3$, etc.

Remarque. La formule qui fournit le nombre des systèmes de racines superflus dans le deuxième cas peut aussi s'appliquer au premier cas ²⁾.

¹⁾ Comparer le mémoire de Jacobi dans le journal de Crelle, tome 15 (1836), intitulé :

De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicum dati ordinis, simul cum enondatione paradoxii algebraici.

Voir aussi : G. SALMON, Courbes planes. n°. 33.

²⁾ Si le premier membre de l'équation du degré le plus élevé peut se décomposer en des facteurs de moindres degrés, le nombre des systèmes de racines superflus peut s'élever à $\binom{m-1}{2}$, ce qui se prouve géométriquement sans aucune difficulté. Nous nous bornons à relever cette particularité, dont la démonstration algébrique nous conduirait à de trop amples détails.

2. Evaluation des systèmes de racines.

PREMIER CAS.

Tous les systèmes de racines des équations données sont différents.

§ 22. Pour évaluer les lm systèmes de racines des équations (51), formons les équations résultantes entre les $lm + 1$ derniers arguments de la fonction F , prenant successivement pour le degré de cette fonction lm , $lm - 1$, $lm - 2$, etc. La première équation résultante est l'équation finale entre y et z , la deuxième contient x au premier degré, mais seulement dans le premier terme; la troisième la contient dans les deux premiers termes, la quatrième dans les trois premiers termes, etc.

Les deux premiers termes de la troisième équation résultante ont pour facteur un binome entre y et z du premier degré, les trois premiers termes de la quatrième équation un trinome entre y et z du second degré, et ainsi de suite.

Si tous les systèmes de racines de l'équation finale entre y et z sont différents, les deux premières équations résultantes suffisent pour l'évaluation des lm systèmes de racines des équations données.

§ 23. Si l'équation finale a en tout $lm - 1$ systèmes de racines différents, le coefficient du premier terme de la deuxième équation résultante s'annule (§ 10). Cette équation se ramène donc à une équation entre y et z du degré $lm - 1$, ayant pour racines les $lm - 1$ systèmes de racines différents de l'équation finale. La deuxième et la troisième équation résultante sont dans ce cas divisibles par le binome entre y et z du premier degré renfermé comme facteur dans les deux premiers termes de la troisième équation résultante (§ 11).

En divisant ces deux équations par le binome considéré on obtient deux équations d'où l'on peut évaluer $lm - 2$ systèmes de racines des équations données. Pour l'évaluation des deux autres systèmes de racines, il faut égaler à zéro le binome considéré, et former une équation résultante dont deux termes contiennent x , l'un au second, l'autre au premier degré. En résolvant ces deux équations on obtient les deux autres systèmes de racines des équations données.

§ 24. Si l'équation finale a en tout $lm - 2$ systèmes de racines différents, les coefficients des deux premiers termes de la troisième équation résultante s'annulent, et cette équation se ramène à une équation entre y et z du $lm - 2^{\text{ième}}$ degré dont les racines

sont les $lm - 2$ systèmes de racines différents de l'équation finale.

Par rapport aux deux autres systèmes de racines de l'équation finale les deux cas suivants peuvent se présenter :

1. l'équation finale a deux systèmes de racines doubles ;
2. cette équation a un seul système de racines triple.

Dans le premier cas la troisième et la quatrième équation sont divisibles par le trinôme entre y et z du second degré contenu comme facteur dans les trois premiers termes de la quatrième équation résultante.

En divisant ces deux équations par le trinôme considéré on obtient deux équations propres à évaluer $lm - 4$ systèmes de racines des équations données. Pour l'évaluation des quatre autres systèmes de racines, on doit égaler à zéro le trinôme considéré et former une équation résultante dont les trois premiers termes contiennent x , le premier au second, les deux autres au premier degré. La résolution de ces deux équations fournit les quatre autres systèmes de racines.

Dans le second cas le trinôme entre y et z du second degré qui est facteur des trois premiers termes de la quatrième équation résultante se ramène à un carré parfait. La troisième et la quatrième équation résultante sont dans ce cas divisibles par le binôme qui est la racine carrée du susdit trinôme. Ces divisions faites, on obtient deux équations propres à évaluer $lm - 3$ systèmes de racines des équations données.

Pour évaluer les trois autres systèmes de racines on égale à zéro le binôme en question et on forme une équation résultante dont les trois premiers termes contiennent x , respectivement au troisième, au second et au premier degré. Ces deux équations fournissent les trois systèmes de racines restants des équations données.

§ 25. Il nous semble inutile d'entrer dans de plus amples détails pour montrer comment on peut continuer cette théorie.

Le nombre des cas qui peuvent se présenter quand l'équation finale a en tout $lm - k$ systèmes de racines différents équivant à celui des manières dont on peut partager le nombre k en des nombres entiers ¹⁾.

¹⁾ On peut déterminer ce nombre en partant du développement suivant :

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^k)} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + \dots + n_k x^k + \dots,$$

où le coefficient n_k de la $k^{ième}$ puissance de x représente le nombre cherché.

Voir : L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, § 324, traduit en allemand par H. MASER (1885) sous le titre „Einleitung in die Analysis des Unendlichen.”

Cependant, on ne doit pas oublier que le nombre des valeurs de x qui se rapportent aux mêmes valeurs de y et z ne peut être supérieur à m , le plus petit degré des deux équations données, supposant toujours que les équations données n'aient pas un commun diviseur ou qu'elles n'admettent pas de systèmes de racines égaux.

§ 26. Pour éclaircir la théorie des deux paragraphes précédents, prenons d'abord les deux équations homogènes (5) à trois variables du second degré, déjà considérées au § 7, et supposons que ces équations n'aient pas de systèmes de racines doubles ou multiples.

Constituons les équations résultantes suivantes :

$${}^4p_{12,13,14,15}y^4 + {}^4p_{11,13,14,15}y^3z + {}^4p_{11,12,14,15}y^2z^2 + {}^4p_{11,12,13,15}yz^3 + {}^4p_{11,12,13,14}z^4 = 0 \dots\dots\dots (54),$$

$${}^3p_{7,8,9,10}xz^2 + {}^3p_{6,8,9,10}y^3 + {}^3p_{6,7,9,10}y^2z + {}^3p_{6,7,8,10}yz^2 + {}^3p_{6,7,8,9}z^3 = 0 \dots\dots\dots (55),$$

$${}^2p_{3,4,5,6}xy + {}^2p_{2,4,5,6}xz + {}^2p_{2,3,5,6}y^2 + {}^2p_{2,3,4,6}yz + {}^2p_{2,3,4,5}z^2 = 0 \dots\dots\dots (56).$$

Si tous les systèmes de racines de l'équation finale (54) sont différents, les équations (54) et (55) suffisent pour l'évaluation des quatre systèmes de racines des équations (5).

Si l'équation finale (54) a en tout trois systèmes de racines différents, on aura

$${}^3p_{7,8,9,10} = 0 \dots\dots\dots (57),$$

et les équations (55) et (56) se ramènent aux deux suivantes :

$$\left. \begin{aligned} &{}^3p_{6,8,9,10}y^3 + {}^3p_{6,7,9,10}y^2z + {}^3p_{6,7,8,10}yz^2 + {}^3p_{6,7,8,9}z^3 = 0, \\ &({}^2p_{3,4,5,6}y + {}^2p_{2,4,5,6}z)x + {}^2p_{2,3,5,6}y^2 + {}^2p_{2,3,4,6}yz + {}^2p_{2,3,4,5}z^2 = 0, \end{aligned} \right\} (58).$$

Dans ce cas, on obtient deux systèmes de racines des équations données en résolvant les équations :

$$\left. \begin{aligned} &\frac{{}^3p_{6,8,9,10}y^3 + {}^3p_{6,7,9,10}y^2z + {}^3p_{6,7,8,10}yz^2 + {}^3p_{6,7,8,9}z^3}{{}^2p_{3,4,5,6}y + {}^2p_{2,4,5,6}z} = 0, \\ &x + \frac{{}^2p_{2,3,5,6}y^2 + {}^2p_{2,3,4,6}yz + {}^2p_{2,3,4,5}z^2}{{}^2p_{3,4,5,6}y + {}^2p_{2,4,5,6}z} = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots (59),$$

et les deux autres systèmes de racines par la résolution de l'équation

$${}^2p_{3,4,5,6}y + {}^2p_{2,4,5,6}z = 0 \dots\dots\dots (60)$$

et l'une des équations (5).

Si l'équation finale (54) a en tout deux systèmes de racines différents, on aura

$${}^2p_{3,4,5,6} = 0 \quad \text{et} \quad {}^2p_{2,4,5,6} = 0 \dots\dots\dots (61).$$

Les quatre systèmes de racines s'obtiennent dans ce cas en résolvant l'équation

$${}^2p_{2,3,5,6}y^2 + {}^2p_{2,3,4,6}yz + {}^2p_{2,3,4,5}z^2 = 0 \dots\dots\dots (62)$$

et l'une des équations (5).

Comme les équations données n'ont pas de systèmes de racines doubles ou multiples, il est impossible que l'équation finale ait un système de racines triple.

§ 27. Prenons pour deuxième exemple les équations :

$$\begin{cases} a_1x^3 + a_2x^2y + a_3x^2z + a_4xy^2 + a_5xyz + a_6xz^2 + a_7y^3 + a_8y^2z + a_9yz^2 + a_{10}z^3 = 0, \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4y^2 + b_5yz + b_6z^2 = 0, \end{cases} \quad (63),$$

où $l = 3$, $m = 2$, et supposons que ces équations n'aient pas de systèmes de racines doubles ou multiples.

Formons les équations résultantes suivantes :

$${}^6p_{23,24,21,26,27,28}y^6 + {}^6p_{22,24,25,26,27,28}y^5z + {}^6p_{22,23,25,26,27,28}y^4z^2 + {}^6p_{22,23,24,26,27,28}y^3z^3 + {}^6p_{22,23,24,25,27,28}y^2z^4 + {}^6p_{22,23,24,25,26,28}yz^5 + {}^6p_{22,23,24,25,26,27}z^6 = 0 \dots (64),$$

$${}^5p_{16,17,18,19,20,21}xz^4 + {}^5p_{15,17,18,19,20,21}y^5 + {}^5p_{15,16,18,19,20,21}y^4z + {}^5p_{15,16,17,19,20,21}y^3z^2 + {}^5p_{15,16,17,18,20,21}y^2z^3 + {}^5p_{15,16,17,18,19,21}yz^4 + {}^5p_{15,16,17,18,19,20}z^5 = 0 \dots (65),$$

$${}^4p_{10,11,12,13,14,15}xyz^2 + {}^4p_{9,11,12,13,14,15}xz^3 + {}^4p_{9,10,12,13,14,15}y^4 + {}^4p_{9,10,11,13,14,15}y^3z + {}^4p_{9,10,11,12,14,15}y^2z^2 + {}^4p_{9,10,11,12,13,15}yz^3 + {}^4p_{9,10,11,12,13,14}z^4 = 0 \dots (66),$$

$${}^3p_{5,6,7,8,9,10}xy^2 + {}^3p_{4,6,7,8,9,10}xyz + {}^3p_{4,5,7,8,9,10}xz^2 + {}^3p_{4,5,6,8,9,10}y^3 + {}^3p_{4,5,6,7,9,10}y^2z + {}^3p_{4,5,6,7,8,10}yz^2 + {}^3p_{4,5,6,7,8,9}z^3 = 0 \dots\dots\dots (67).$$

Pour obtenir les systèmes de racines des équations données (63), on procède avec les équations (64) à (67) de la même manière que l'on a fait dans le paragraphe précédent avec les équations (54) à (56).

Dans le cas où

$${}^3p_{5,6,7,8,9,10} = 0, \quad {}^3p_{4,6,7,8,9,10} = 0, \quad {}^3p_{4,5,7,8,9,10} = 0 \dots\dots\dots (68),$$

l'équation finale (64) a en tout trois systèmes de racines différents, déterminés par l'équation :

$${}^3p_{4,5,6,8,9,10}y^3 + {}^3p_{4,5,6,7,9,10}y^2z + {}^3p_{4,5,6,7,8,10}yz^2 + {}^3p_{4,5,6,7,8,9}z^3 = 0 \dots (69).$$

Par rapport aux systèmes de racines doubles ou multiples de l'équation finale les trois cas suivants pourraient se présenter :

1. trois systèmes doubles,
2. un système triple et un système double.
3. un système quadruple.

Dans le premier cas on obtient les systèmes de racines des équations données par la résolution de l'équation (69) et de la deuxième des équations (63).

Les deux autres cas pourraient se présenter seulement, si les équations données admettaient des systèmes de racines doubles ou multiples. Il en serait de même, si l'on supposait que l'équation finale eût moins de trois systèmes de racines différents.

Ces cas restent donc ici hors de considération.

DEUXIÈME CAS.

Les équations données admettent des systèmes de racines égaux.

§ 28. Pour s'assurer de l'existence de systèmes de racines doubles ou multiples, il faut former le résultant du système d'équations composé des équations données (51) et d'une des équations que l'on obtient en égalant à zéro les déterminants de l'assemblant fonctionnel qui ne s'annulent pas identiquement ¹⁾:

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{array} \right| \dots \dots \dots (70).$$

Si ce résultant s'évanouit, les équations données admettent des systèmes de racines égaux.

Les solutions communes des trois équations mentionnées sont les systèmes de racines doubles ou multiples des équations données; savoir, les systèmes de racines doubles des équations données forment

¹⁾ Comparer: J. A. SERRET. Cours d'Algèbre Supérieure, 4^e édition, tome premier, n° 89.
3*

une fois une solution commune des trois susdites équations, les systèmes de racines triples deux fois, et ainsi de suite.

On peut donc évaluer les systèmes de racines doubles ou multiples des équations données en appliquant la méthode pour l'évaluation des solutions communes de n équations homogènes à n variables, mentionnée dans notre mémoire „Théorie générale de l'élimination.”

Il ne nous semble pas inutile de rappeler ici que la méthode par laquelle on obtient l'équation finale et les autres équations résultantes donne encore un autre moyen pour former les équations fournissant les solutions communes de n équations homogènes à n variables. Par l'application de cette méthode on peut écrire immédiatement les équations qui fournissent ces solutions communes.

§ 29. Quoiqu'on puisse évaluer de cette manière les systèmes de racines doubles ou multiples, il n'est pas nécessaire de les déterminer séparément des autres systèmes de racines des équations données. On se servira plutôt de la méthode que nous avons appliquée, lorsqu'il s'agissait d'équations dépourvues de systèmes de racines égaux.

Formons de nouveau les équations résultantes entre les $lm + 1$ derniers termes de la fonction P , prenant successivement pour le degré de cette fonction $lm, lm - 1, lm - 2$, etc. La première équation résultante ainsi obtenue est l'équation finale entre y et z . Si les équations données ont en tout $lm - k$ systèmes de racines différents, l'équation finale a tout au plus $lm - k$ systèmes de racines différents. En ce cas il n'est pas de rigueur que le premier terme de la deuxième équation résultante s'annule.

Si le coefficient du premier terme de la deuxième équation résultante a une valeur différente de zéro, les deux premières équations résultantes suffisent pour déterminer les systèmes de racines des équations données.

Si le coefficient du premier terme de la deuxième équation résultante s'annule, cette équation se ramène à une équation entre y et z du degré $lm - 1$, ayant au moins pour racines tous les systèmes de racines différents de l'équation finale entre les mêmes variables. La troisième équation résultante est dans ce cas divisible par le binôme entre y et z du premier degré qui est facteur des deux premiers termes de cette équation.

Si les coefficients des deux premiers termes de la troisième équation résultante s'annulent, cette équation se ramène à une équation entre y et z du degré $lm - 2$, ayant au moins pour racines tous les systèmes de racines différents de l'équation finale entre les mêmes variables.

En somme, dans le cas en question l'évaluation des systèmes de racines des équations données peut se faire de la même manière que dans le cas où les équations n'admettent pas de systèmes de racines égaux.

§ 30. Pour conclure ce chapitre, nous mentionnons brièvement les changements que subissent les résultats, quand quelques coefficients des équations données sont des zéros. Il peut arriver dans ce cas que le nombre des systèmes de racines indépendants est moindre que dans le cas où tous les coefficients diffèrent de zéro. Un exemple s'en trouve déjà dans le mémoire „Théorie générale de l'élimination” dans le § 115, où les deux équations (68), qui sont l'une et l'autre du second degré, ont en tout trois systèmes de racines formant les trois solutions communes que les équations données admettent dans le cas considéré.

A première vue, il semble que dans quelques cas les résultats obtenus subissent des modifications, cependant les résultats généraux ne changent pas.

Prenons pour exemple le système des deux équations du second degré:

$$\left. \begin{aligned} a_2 xy + a_3 xz + a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_2 xy + b_3 xz + b_4 y^2 + b_5 yz + b_6 z^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71),$$

où manquent les termes qui renfermeraient x^2 .

Toutes les équations (54), (55), (56) s'anéantissent. Il semble que l'équation finale entre y et z soit du troisième degré et de la forme ¹⁾:

$$\begin{aligned} {}^2p_{1,3,5,6} y^3 + ({}^2p_{1,3,4,6} + {}^2p_{1,2,5,6}) y^2 z + ({}^2p_{1,3,4,5} + {}^2p_{1,2,4,6}) y z^2 \\ + {}^2p_{1,2,4,5} z^3 = 0 \dots\dots\dots (72). \end{aligned}$$

Cependant, tenant compte de l'évanouissement de a_1 et b_1 dans les équations (5), on peut former les équations résultantes suivantes:

$$\left. \begin{aligned} {}^4p_{1,13,14,15} y^3 z + {}^4p_{1,12,14,15} y^2 z^2 + {}^4p_{1,12,13,15} y z^3 + {}^4p_{1,12,13,14} z^4 &= 0, \\ {}^3p_{1,8,9,10} y^3 + {}^3p_{1,7,9,10} y^2 z + {}^3p_{1,7,8,10} y z^2 + {}^3p_{1,7,8,9} z^3 &= 0, \\ {}^2p_{1,4,5,6} xz + {}^2p_{1,3,5,6} y^2 + {}^2p_{1,3,4,6} yz + {}^2p_{1,3,4,5} z^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (73).$$

¹⁾ On obtient cette équation en éliminant x entre les deux équations terminales:

$$\begin{aligned} {}^2p_{1,4,5,6} xz + {}^2p_{1,3,5,6} y^2 + {}^2p_{1,3,4,6} yz + {}^2p_{1,3,4,5} z^2 &= 0, \\ -{}^2p_{1,4,5,6} xy + {}^2p_{1,2,5,6} y^2 + {}^2p_{1,2,4,6} yz + {}^2p_{1,2,4,5} z^2 &= 0 \end{aligned}$$

On déduit de ces équations que l'un des systèmes de racines des équations (71) est $x =$ un nombre arbitraire, $y = 0$, $z = 0$, et que les trois autres systèmes de racines de ces équations, ${}^2p_{1,4,5,6}$ différant de zéro, sont déterminés par les deux dernières équations (73).

3. Détermination des systèmes de racines superflus en fonction des autres systèmes de racines.

§ 31. Si $m > 2$, les lm systèmes de racines obtenus par les méthodes expliquées dans les paragraphes précédents sont liés par $\binom{m-1}{2}$ relations, de sorte que l'on peut regarder $lm - \binom{m-1}{2}$ ou $\binom{l+2}{2} - \binom{l-m+2}{2} - 1$ systèmes de racines comme indépendants entre eux.

Cependant, on ne peut prendre arbitrairement un si grand nombre de systèmes de racines, car les coefficients de la deuxième équation (51) sont déjà parfaitement déterminés par $\binom{m+2}{2} - 1$ systèmes de racines indépendants, c'est-à-dire par $m(l-m) - 1$ systèmes de racines de moins que $lm - \binom{m-1}{2}$. Les $m(l-m) - 1$ systèmes de racines restants doivent être choisis de telle manière qu'ils satisfassent à l'équation homogène du $m^{\text{ième}}$ degré déterminée par les $\binom{m+2}{2} - 1$ autres systèmes de racines indépendants.

Cependant ce n'est pas la seule condition à laquelle les $lm - \binom{m-1}{2}$ systèmes de racines indépendants doivent satisfaire ¹⁾.

Si l'on veut que les équations (51) ne puissent se décomposer en facteurs de degrés inférieurs, il n'y a pas plus de $mk - \binom{k-1}{2}$ ou $\binom{m+2}{2} - \binom{m-k+2}{2} - 1$ des $\binom{m+2}{2} - 1$ systèmes de racines considérés qui peuvent satisfaire à une même équation homogène du $k^{\text{ième}}$ degré entre les mêmes variables, où $k < m$.

Par contre, si l'on veut admettre que les équations données puissent se décomposer en facteurs de moindres degrés, le nombre des systèmes de racines indépendants qui peuvent satisfaire à une même équation du $k^{\text{ième}}$ degré est tout au plus de $\binom{m+2}{2} - \binom{m-k+2}{2}$,

¹⁾ Comparer: G. SALMON, Courbes planes n° 28.

tandis que entre les $\binom{k+2}{2} - 1$ systèmes de racines restants il n'y en a que $\binom{k+2}{2} - \binom{k-k_1+2}{2}$ qui puissent satisfaire à une équation du $k_1^{ième}$ degré, où $k_1 < k$, et ainsi de suite.

§ 32. Cela posé, formons l'assemblant des coefficients, prenant l pour le degré de la fonction F . Cet assemblant contient $1 + \binom{l-m+2}{2}$ colonnes. Formons ensuite pour la même valeur du degré de la fonction F l'assemblant des $lm - \binom{m-1}{2}$ systèmes de racines indépendants. Cet assemblant est supplémentaire à l'assemblant des coefficients.

Les équations résultantes qu'on peut former au moyen de ces assemblants, contiennent en tout $\binom{l+2}{2} - \binom{l-m+2}{2}$ termes, de sorte qu'il manque dans chaque équation résultante $\binom{l-m+2}{2}$ arguments de la fonction F . Les coefficients de ces équations ne dépendent que des $lm - \binom{m-1}{2}$ systèmes de racines indépendants.

Prenant $j = l$, on peut former en tout un nombre d'équations résultantes égal à $\binom{\binom{l+2}{2}}{\binom{l-m+2}{2}}$. Ces équations résultantes ne sont pas toutes indépendantes. En construisant les $\binom{l-m+2}{2} + 1$ équations résultantes dans lesquelles $\binom{l-m+2}{2}$ termes manquent des $\binom{l-m+2}{2} + 1$ termes désignés, on obtient un système d'équations résultantes qui sont indépendantes par rapport aux arguments de la fonction F , car leur assemblant contient un déterminant dont tous les éléments sont des zéros, excepté ceux de la diagonale. Ces équations linéaires par rapport aux arguments de la fonction F sont vérifiées en tout par

$$\binom{l+2}{2} - \binom{l-m+2}{2} - 1 = lm - \binom{m-1}{2}. \dots\dots\dots (74),$$

systèmes de racines indépendants.

Le nombre des systèmes de racines superflus des équations données

doit donc être $\binom{m-1}{2}$, résultat s'accordant avec la formule (53).

§ 33. Il n'est pas difficile d'indiquer comment on exprime les systèmes de racines superflus en fonction des $lm - \binom{m-1}{2}$ systèmes de racines indépendants.

Prenons l pour le degré de la fonction F , constituons les équations résultantes et exprimons les coefficients de ces équations par des déterminants de l'assemblant des systèmes de racines indépendants.

Ces équations résultantes sont toutes du $l^{\text{ième}}$ degré. Dans le cas où l'on a $m < l$, quelques-unes de ces équations se réduisent à des équations du degré m , le nombre des termes de la deuxième équation (51) étant inférieur au nombre des termes d'une équation résultante formée pour $j = l$, car la relation

$$\binom{m+2}{2} < \binom{l+2}{2} - \binom{l-m+2}{2} \dots \dots \dots (75),$$

qui se ramène à

$$l(l-m) > 1 \dots \dots \dots (76),$$

est vérifiée dans le cas considéré (§ 8, 1).

On peut alors remplacer les deux équations données (51) par deux équations résultantes indépendantes respectivement du degré l et m , dont les coefficients s'expriment par des déterminants de l'assemblant des systèmes de racines indépendants.

En partant de ces deux équations formons l'équation finale entre deux variables quelconques. De cette manière on obtient une équation finale dont les coefficients ne peuvent dépendre que des $lm - \binom{m-1}{2}$ systèmes de racines indépendants.

En appliquant les théorèmes de Viète, on peut déduire de cette équation finale une équation homogène du degré $\binom{m-1}{2}$ entre les mêmes variables, dont les systèmes de racines sont précisément les systèmes de racines de l'équation finale qui se rapportent aux $\binom{m-1}{2}$ systèmes de racines superflus des équations données, comme il sera exposé dans la suite de ce chapitre.

§ 34. S'il n'existe qu'un seul système de racines superflu, les deux premiers coefficients de l'équation finale entre y et z obtenue d'après la méthode expliquée dans le paragraphe précédent suffi-

sont pour l'évaluation des éléments y et z du système de racines superflu.

Dans le cas où il y a k systèmes de racines superflus, les $k + 1$ premiers termes de l'équation finale entre y et z sont nécessaires pour évaluer les éléments y et z des k systèmes de racines superflus.

Divisant le deuxième, le troisième, etc. coefficient de l'équation finale par le premier coefficient, on obtient des résultats qui sont respectivement égaux à

$$\left. \begin{aligned} & - \left(\frac{y_1}{z_1} + \frac{y_2}{z_2} + \dots + \frac{y_{lm}}{z_{lm}} \right), \\ & + \left(\frac{y_1 y_2}{z_1 z_2} + \frac{y_1 y_3}{z_1 z_3} + \dots + \frac{y_{lm-1} y_{lm}}{z_{lm-1} z_{lm}} \right), \\ & \dots \dots \dots \\ & (-1)^k \left(\frac{y_1 y_2 \dots y_k}{z_1 z_2 \dots z_k} + \frac{y_1 y_2 \dots y_{k-1} y_{k+1}}{z_1 z_2 \dots z_{k-1} z_{k+1}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{y_{lm-k+1} y_{lm-k+2} \dots y_{lm}}{z_{lm-k+1} z_{lm-k+2} \dots z_{lm}} \right), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (77),$$

etc.

De ces égalités on peut déterminer les valeurs suivantes:

$$\left. \begin{aligned} & - \left(\frac{y_1}{z_1} + \frac{y_2}{z_2} + \dots + \frac{y_k}{z_k} \right), \\ & + \left(\frac{y_1 y_2}{z_1 z_2} + \frac{y_1 y_3}{z_1 z_3} + \dots + \frac{y_{k-1} y_k}{z_{k-1} z_k} \right), \\ & \dots \dots \dots \\ & (-1)^k \frac{y_1 y_2 \dots y_k}{z_1 z_2 \dots z_k}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (78),$$

exprimées en fonction de coefficients de l'équation finale et des $lm-k$ systèmes de racines indépendants.

Ces valeurs forment les coefficients du deuxième, troisième, etc., $k + 1^{\text{ième}}$ terme d'une équation homogène entre y et z du $k^{\text{ième}}$ degré, où l'on prend l'unité pour le coefficient du premier terme. Les k systèmes de racines de l'équation ainsi obtenue représentent alors les valeurs de y et z qui se rapportent aux k systèmes de racines superflus des équations données.

Remarque. Pour l'évaluation d'un seul système de racines superflu on peut se servir aussi des coefficients du premier et du dernier terme de l'équation finale, pour trois systèmes de racines superflus

des coefficients du premier et des trois derniers termes, et ainsi de suite.

§ 35. Pour éclaircir ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, prenons les deux équations homogènes du troisième degré à trois variables :

$$\left. \begin{aligned} a_1x^3 + a_2x^2y + a_3x^2z + a_4xy^2 + a_5xyz + a_6xz^2 + a_7y^3 + a_8y^2z + a_9yz^2 + a_{10}z^3 &= 0, \\ b_1x^3 + b_2x^2y + b_3x^2z + b_4xy^2 + b_5xyz + b_6xz^2 + b_7y^3 + b_8y^2z + b_9yz^2 + b_{10}z^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (79).$$

Si ces équations n'ont pas de systèmes de racines égaux, il existe sans doute un seul système de racines superflu ¹⁾.

Constituons l'assemblant des coefficients, prenant 3 pour le degré de la fonction F :

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \\ a_6 & b_6 \\ a_7 & b_7 \\ a_8 & b_8 \\ a_9 & b_9 \\ a_{10} & b_{10} \end{array} \right| \dots \dots \dots (80),$$

et l'assemblant des huit systèmes de racines indépendants:

$$\left| \begin{array}{cccccccc} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & x_6^3 & x_7^3 & x_8^3 \\ x_1^2y_1 & x_2^2y_2 & x_3^2y_3 & x_4^2y_4 & x_5^2y_5 & x_6^2y_6 & x_7^2y_7 & x_8^2y_8 \\ x_1^2z_1 & x_2^2z_2 & x_3^2z_3 & x_4^2z_4 & x_5^2z_5 & x_6^2z_6 & x_7^2z_7 & x_8^2z_8 \\ x_1y_1^2 & x_2y_2^2 & x_3y_3^2 & x_4y_4^2 & x_5y_5^2 & x_6y_6^2 & x_7y_7^2 & x_8y_8^2 \\ x_1y_1z_1 & x_2y_2z_2 & x_3y_3z_3 & x_4y_4z_4 & x_5y_5z_5 & x_6y_6z_6 & x_7y_7z_7 & x_8y_8z_8 \\ x_1z_1^2 & x_2z_2^2 & x_3z_3^2 & x_4z_4^2 & x_5z_5^2 & x_6z_6^2 & x_7z_7^2 & x_8z_8^2 \\ y_1^3 & y_2^3 & y_3^3 & y_4^3 & y_5^3 & y_6^3 & y_7^3 & y_8^3 \\ y_1^2z_1 & y_2^2z_2 & y_3^2z_3 & y_4^2z_4 & y_5^2z_5 & y_6^2z_6 & y_7^2z_7 & y_8^2z_8 \\ y_1z_1^2 & y_2z_2^2 & y_3z_3^2 & y_4z_4^2 & y_5z_5^2 & y_6z_6^2 & y_7z_7^2 & y_8z_8^2 \\ z_1^3 & z_2^3 & z_3^3 & z_4^3 & z_5^3 & z_6^3 & z_7^3 & z_8^3 \end{array} \right| \dots \dots (81).$$

¹⁾ Nous nous abstenons dans ce mémoire d'entrer en des particularités relatives aux systèmes de racines superflus pour le cas où les équations données admettent des systèmes de racines égaux.

Au moyen du dernier assemblant on peut former les deux équations résultantes indépendantes :

$$\left. \begin{aligned} X_{1,2}x^2y - X_{1,3}x^2z + X_{1,4}xy^2 - X_{1,5}xyz + X_{1,6}xz^2 \\ - X_{1,7}y^3 + X_{1,8}y^2z - X_{1,9}yz^2 + X_{1,10}z^3 = 0, \\ - X_{1,2}x^3 + X_{2,3}x^2z - X_{2,4}xy^2 + X_{2,5}xyz - X_{2,6}xz^2 \\ + X_{2,7}y^3 - X_{2,8}y^2z + X_{2,9}yz^2 - X_{2,10}z^3 = 0, \end{aligned} \right\} \dots (S2),$$

qui peuvent alors remplacer les deux équations données (79).

Formons par rapport aux équations (S2) l'assemblant des coefficients, prenant 9 pour le degré de la fonction F , et indiquons les déterminants de cet assemblant par ${}^9P_{1,2,3,4,5,6,7,8,9}$, ${}^9P_{1,2,3,4,5,6,7,8,10}$, etc.

L'équation finale entre y et z prend alors la forme suivante :

$${}^9P_{47,48,49,50,51,52,53,54,55}y^9 + {}^9P_{46,48,49,50,51,52,53,54,55}y^8z + \dots + {}^9P_{46,47,48,49,50,51,52,53,54}z^9 = 0 \dots (S3).$$

De cette équation on peut déduire :

$$\frac{y_1}{z_1} + \frac{y_2}{z_2} + \dots + \frac{y_8}{z_8} + \frac{y_9}{z_9} = - \frac{{}^9P_{46,48,49,50,51,52,53,54,55}}{{}^9P_{47,48,49,50,51,52,53,54,55}} \dots (S4),$$

d'où s'obtient immédiatement le rapport de y_9 par z_9 exprimé en fonction des huit autres systèmes de racines.

La valeur de x_9 s'obtient de la même manière de l'équation finale entre x et z , ou par la substitution des valeurs trouvées dans une équation terminale, qu'on peut construire pour une valeur quelconque du degré de la fonction F .

Remarque. La valeur de $\frac{y_9}{z_9}$ s'obtient encore en se servant du premier et du dernier terme de l'équation (S3). De cette manière on obtient

$$\frac{y_1}{z_1} \frac{y_2}{z_2} \dots \frac{y_8}{z_8} \frac{y_9}{z_9} = - \frac{{}^9P_{46,47,48,49,50,51,52,53,54}}{{}^9P_{47,48,49,50,51,52,53,54,54}} \dots (S5).$$

§ 36. Nous ne nous arrêterons pas à choisir un exemple d'équations admettant plus d'un système de racines superflu. La méthode qu'il faut suivre en ce cas pour exprimer les systèmes de racines superflus en fonction des systèmes de racines indépendants est suffisamment expliquée par ce qui précède.

Reste à remarquer que les coefficients de l'équation finale (S3)

ne sont pas dépourvus de facteurs superflus, et en plus, que ces coefficients sont des déterminants dont les éléments sont eux-mêmes des déterminants. Il serait plus important, si l'on pouvait exprimer immédiatement les systèmes de racines superflus en fonction des déterminants de l'assemblant des systèmes de racines indépendants, prenant $j = l$.

C'est possible dans le cas où les deux équations données sont de degrés égaux.

Pour le démontrer, reprenons les deux équations homogènes (79) du troisième degré à trois variables, et formons l'assemblant des coefficients de ces équations, prenant 9 pour le degré de la fonction F . L'équation finale entre y et z est alors :

$${}^9p_{47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55}y^9 + {}^9p_{46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55}y^8z + \dots \\ \dots + {}^9p_{46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54}z^9 = 0 \dots \dots \dots (86).$$

Le coefficient de y^9 est égal au produit des deux facteurs suivants :

1. celui qui est commun à tous les coefficients de l'équation finale, y compris le facteur commun à tous les déterminants de l'assemblant des coefficients;

2. le résultant des équations où se ramènent les équations données en égalant à zéro la variable z .

Le coefficient de z^9 se compose également de deux facteurs, dont le premier est le même que le premier facteur du coefficient de y^9 et le second le résultant des équations que l'on obtient en égalant la variable y à zéro dans les équations données ¹⁾.

Notant ces résultants par $R_{z=0}$ et $R_{y=0}$, on obtient la relation :

$$\frac{{}^9p_{47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55}}{R_{z=0}} = \frac{{}^9p_{46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54}}{R_{y=0}} \dots \dots \dots (87).$$

Comme les coefficients de y^9 et z^9 dans l'équation finale (86) forment une proportion avec les produits des racines de cette équation, on obtient :

$$\frac{y_1 y_2 \dots y_8 y_9}{R_{y=0}} = \frac{z_1 z_2 \dots z_8 z_9}{R_{z=0}} \dots \dots \dots (88).$$

En appliquant la même méthode à l'équation finale entre x et z , on trouve l'égalité :

¹⁾ Comparer: L'équation finale, § 19 et suivants.

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_8 x_9}{R_{x=0}} = \frac{y_1 y_2 \dots y_8 y_9}{R_{y=0}} = \frac{z_1 z_2 \dots z_8 z_9}{R_{z=0}} \dots \dots \dots (89),$$

dans laquelle $R_{x=0}$ représente le résultant des équations:

$$\left. \begin{aligned} a_7 y^3 + a_8 y^2 z + a_9 y z^2 + a_{10} z^3 &= 0, \\ b_7 y^3 + b_8 y^2 z + b_9 y z^2 + b_{10} z^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (90),$$

$R_{y=0}$ le résultant des équations:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^3 + a_3 x^2 z + a_6 x z^2 + a_{10} z^3 &= 0, \\ b_1 x^3 + b_3 x^2 z + b_6 x z^2 + b_{10} z^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (91),$$

$R_{z=0}$ le résultant des équations:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_4 x y^2 + a_7 y^3 &= 0, \\ b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_4 x y^2 + b_7 y^3 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (92).$$

En déterminant le résultant des équations (90) par la méthode de SYLVESTER ¹⁾, on obtient:

$$R_{x=0} = \left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} a_7 & b_7 \\ a_8 & b_8 \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} a_7 & b_7 \\ a_9 & b_9 \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} a_7 & b_7 \\ a_{10} & b_{10} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_7 & b_7 \\ a_9 & b_9 \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} a_7 & b_7 \\ a_{10} & b_{10} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_8 & b_8 \\ a_9 & b_9 \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} a_8 & b_8 \\ a_{10} & b_{10} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} a_7 & b_7 \\ a_{10} & b_{10} \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} a_8 & b_8 \\ b_{10} & b_{10} \end{array} \right|, & \left| \begin{array}{cc} a_9 & b_9 \\ a_{10} & b_{10} \end{array} \right| \end{array} \right| \dots \dots \dots (93),$$

et des résultats analogues pour $R_{y=0}$ et $R_{z=0}$.

En substituant aux déterminants de l'assemblant (80) qui entrent dans la forme (93), les déterminants supplémentaires de l'assemblant (81), on obtient l'égalité suivante ²⁾:

¹⁾ Voir: G. SALMON, Leçons d'Algèbre Supérieure, n° 91.

²⁾ Le même résultat, mais obtenu d'après une autre méthode d'élimination, se trouve dans notre communication adressée à l'Académie Royale de Sciences d'Amsterdam, et intitulée: „Détermination analytique du neuvième point d'intersection de deux courbes planes du troisième degré qui passent par huit points donnés." (Verslag van de gewone Vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam van Zaterdag 29 Juni 1901).

$$\begin{array}{c} x_1 \ x_2 \cdot \cdot \cdot \cdot x_8 \ x_9 \\ \hline \left[\begin{array}{ccc} X_{7,8}, & X_{7,9}, & X_{7,10} \\ X_{7,9}, X_{7,10} + X_{8,9}, X_{8,10} \\ X_{7,10}, & X_{8,10}, & X_{9,10} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} y_1 \ y_2 \cdot \cdot \cdot \cdot y_8 \ y_9 \\ \hline \left[\begin{array}{ccc} X_{1,3}, & X_{1,6}, & X_{1,10} \\ X_{1,6}, X_{1,10} + X_{3,6}, X_{3,10} \\ X_{1,10}, & X_{3,10}, & X_{6,10} \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} z_1 \ z_2 \cdot \cdot \cdot \cdot z_8 \ z_9 \\ \hline \left[\begin{array}{ccc} X_{1,2}, & X_{1,4}, & X_{1,7} \\ X_{1,4}, X_{1,7} + X_{2,4}, X_{2,7} \\ X_{1,8}, & X_{2,7}, & X_{4,7} \end{array} \right] \end{array} \dots (94),$$

d'où l'on peut déduire aisément les valeurs de x_9, y_9, z_9 en fonction des huit autres systèmes de racines des équations données (79).

III. Trois équations homogènes à quatre variables.

1. Nombre des systèmes de racines superflus.

§ 37. Soient

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x, y, z, u) \equiv a_1 x^l + a_2 x^{l-1} y + a_3 x^{l-1} z + a_4 x^{l-1} u + a_5 x^{l-2} y^2 + \dots + a_{\binom{l+3}{3}} u^l = 0, \\ \chi(x, y, z, u) \equiv b_1 x^m + b_2 x^{m-1} y + b_3 x^{m-1} z + b_4 x^{m-1} u + b_5 x^{m-2} y^2 + \dots + b_{\binom{m+3}{3}} u^m = 0, \\ \psi(x, y, z, u) \equiv c_1 x^n + c_2 x^{n-1} y + c_3 x^{n-1} z + c_4 x^{n-1} u + c_5 x^{n-2} y^2 + \dots + c_{\binom{n+3}{3}} u^n = 0, \end{array} \right\} (95)$$

les équations données, respectivement des degrés l, m et n , où $l \geq m \geq n$.

Prenant l pour le degré de la fonction F , on obtient les valeurs:

$$\left. \begin{array}{l} v = \binom{l+3}{3} \\ v_1 = 1 + \binom{l-m+3}{3} + \binom{l-n+3}{3} \\ v_2 = \binom{l-m-n+3}{3} + \binom{-n+3}{3} + \binom{-m+3}{3} \\ v_3 = \binom{-m-n+3}{3} \end{array} \right\} \dots (96).$$

On tire de ces valeurs les conclusions suivantes:

1. Si $m + n \leq 3$, les lmn systèmes de racines sont indépendants;
2. Si $m + n > 3, m \leq 3$, et par conséquent $l \geq m + n - 3$, le nombre des systèmes de racines superflus est

$$-v_3 = \binom{m+n-1}{3} \dots \dots \dots (97);$$

3. Si $m > 3, n \leq 3$, et par conséquent $l \geq m + n - 3$, le nombre des systèmes de racines superflus est

$$\beta_3 - v_3 = -\binom{m-1}{3} + \binom{m+n-1}{3} \dots\dots\dots (98);$$

4. Si $n > 3, l \geq m + n - 3$, le nombre des systèmes de racines superflus est

$$\beta_2 + \beta_3 - v_3 = -\binom{n-1}{3} - \binom{m-1}{3} + \binom{m+n-1}{3} \dots (99);$$

5. Si $n > 3, l < m + n - 3$, le nombre des systèmes de racines superflus est

$$\begin{aligned} v_2 - v_3 = & -\binom{m+n-l-1}{3} - \binom{n-1}{3} \\ & - \binom{m-1}{3} + \binom{m+n-1}{3} \dots\dots (100). \end{aligned}$$

Exemples :

Pour $l = 2, m = 2, n = 2$, on trouve $-v_3 = 1$;
 „ $l = 3, m = 3, n = 2$, „ „ $-v_3 = 4$;
 „ $l = 4, m = 3, n = 3$, „ „ $-v_3 = 10$;
 „ $l = 7, m = 6, n = 5$, „ „ $v_2 - v_3 = 105$; etc.

Remarque. La formule qui fournit le nombre des systèmes de racines superflus dans le dernier cas, peut aussi s'appliquer aux autres cas, si l'on regarde comme des zéros les coefficients binomiaux des puissances négatives qui se présentent dans le cas où $l > m + n - 1$).

¹⁾ Les résultats obtenus dans ce paragraphe ne diffèrent pas de ceux mentionnés par JACOBI dans le journal de Crelle, tome 15 (1836), et qu'il énonce comme suit :

Si $\mu \geq \nu + \tilde{\omega}$, *numerus punctorum, per quae superficiem μ^{ti} ordinis ducere licet, quae in curva intersectionis duarum superficierum ν^{ti} et $\tilde{\omega}^{ti}$ ordinis ex arbitrio accipere licet, est*

$$\nu \tilde{\omega} \left(\mu + 2 - \frac{\nu + \tilde{\omega}}{2} \right) - 1.$$

Si $\mu > \nu, \mu > \tilde{\omega}$, sed $\mu < \nu + \mu$ fit idem numerus

$$\nu \tilde{\omega} \left(\mu + 2 - \frac{\nu + \tilde{\omega}}{2} \right) + \frac{(\nu + \tilde{\omega} - \mu - 1)(\nu + \tilde{\omega} - \mu - 2)(\nu + \tilde{\omega} - \mu - 3)}{2 \cdot 3} - 1.$$

Si l'on retranche le nombre des points, que l'on peut choisir à volonté, du nombre de $\mu \nu \tilde{\omega}$, on obtient précisément le nombre des systèmes de racines superflus mentionné dans ce paragraphe.

2. Evaluation des systèmes de racines.

§ 38. Cette évaluation s'opère de la même manière que dans le chapitre précédent.

Si l'on veut s'assurer de l'existence de systèmes de racines égaux, il faut former le résultant des trois équations données et d'une des équations que l'on obtient en égalant à zéro l'un des déterminants de l'assemblant fonctionnel qui ne s'annule pas identiquement :

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{array} \right| \dots\dots\dots (101).$$

Si ce résultant s'annule, les équations données ont un ou plusieurs systèmes de racines égaux.

L'évaluation des systèmes de racines doubles ou multiples peut se faire de la même manière que dans le cas où il y a deux équations homogènes à trois variables.

§ 39. Pour évaluer les systèmes de racines des équations données (95), prenons successivement pour le degré de la fonction F lmn , $lmn - 1$, $lmn - 2$, etc., et formons de la manière connue l'équation finale et les équations terminales qui sont nécessaires pour la détermination des autres variables.

Si l'équation finale a des systèmes de racines doubles ou multiples, il se peut que les équations terminales perdent la troisième ou la quatrième variable, ou qu'on puisse décomposer ces équations en des facteurs dont l'un ne contient que les deux variables de l'équation finale considérée.

En somme, les mêmes cas que nous avons considérés dans le chapitre précédent, peuvent se présenter dans le cas où il y a trois équations homogènes à quatre variables.

Nous ne nous arrêterons pas à entrer dans d'autres détails.

§ 40. Appliquons en dernier lieu la théorie du paragraphe précédent aux trois équations homogènes à quatre variables :

$$\left. \begin{array}{l} a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4xu + a_5y^2 + a_6yz + a_7yu + a_8z^2 + a_9zu + a_{10}u^2 = 0, \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4xu + b_5y^2 + b_6yz + b_7yu + b_8z^2 + b_9zu + b_{10}u^2 = 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4u = 0, \end{array} \right\} \dots (102),$$

où $l = 2$, $m = 2$, $n = 1$.

Prenant pour j successivement 4, 3, 2, on obtient les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad j = 4, \quad v = 35, \quad v_1 = 40, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 0; \\ 2. \quad j = 3, \quad v = 20, \quad v_1 = 18, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 0; \\ 3. \quad j = 2, \quad v = 10, \quad v_1 = 6, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0; \end{array} \right\} \dots\dots\dots (103).$$

Après avoir construit les assemblants des coefficients, on formera les équations résultantes :

$${}^4p_{32,33,34,35}z^4 + {}^4p_{31,33,34,35}z^3u + {}^4p_{31,32,34,35}z^2u^2 + {}^4p_{31,32,33,35}zu^3 + {}^4p_{31,32,33,34}u^4 = 0 \dots\dots (104),$$

$${}^3p_{17,18,19,20}yu^2 + {}^3p_{16,18,19,20}z^3 + {}^3p_{16,17,19,20}z^2u + {}^3p_{16,17,18,20}zu^2 + {}^3p_{16,17,18,19}u^3 = 0 \dots\dots (105),$$

$${}^2p_{7,8,9,10}yz + {}^2p_{6,8,9,10}yu + {}^2p_{6,7,9,10}z^2 + {}^2p_{6,7,8,10}zu + {}^2p_{6,7,8,9}u^2 = 0 \dots\dots (106),$$

$${}^2p_{6,7,9,10}y^2 + {}^2p_{5,7,9,10}yz + {}^2p_{5,6,9,10}yu - {}^2p_{5,6,7,10}zu - {}^2p_{5,6,7,9}u^2 = 0 \dots\dots (107).$$

Si ${}^3p_{17,18,19,20}$ est différent de zéro, les équations (104), (105) et la troisième équation (102) suffisent pour l'évaluation des quatre systèmes de racines des équations données (102).

Si l'on a ${}^3p_{17,18,19,20} = 0$, l'équation (105) se ramène à une équation entre les deux variables z et u du troisième degré, ayant au moins pour racines tous les systèmes de racines différents de l'équation finale (104).

L'équation (106) est dans ce cas divisible par le binôme

$${}^2p_{7,8,9,10}z + {}^2p_{6,8,9,10}u \dots\dots\dots (108).$$

Deux systèmes de racines s'obtiennent en résolvant l'équation

$${}^2p_{7,8,9,10}z + {}^2p_{6,8,9,10}u = 0 \dots\dots\dots (109),$$

l'équation (107) et la troisième équation (102), et les deux autres par la résolution des équations :

$$\frac{{}^3p_{16,18,19,20}z^3 + {}^3p_{16,17,19,20}z^2u + {}^3p_{16,17,18,20}zu^2 + {}^3p_{16,17,18,19}u^3}{{}^2p_{7,8,9,10}z + {}^2p_{6,8,9,10}u} = 0 \dots\dots (110),$$

$$y + \frac{{}^2p_{6,7,9,10}z^2 + {}^2p_{6,7,8,10}zu + {}^2p_{6,7,8,9}u^2}{{}^2p_{7,8,9,10}z + {}^2p_{6,8,9,10}u} = 0 \dots\dots\dots (111).$$

et la troisième équation (102).

Si l'on a ${}^2p_{7,8,9,10} = 0$ et ${}^2p_{6,8,9,10} = 0$, l'équation (106) se ramène à une équation entre z et u du second degré, ayant au moins pour racines tous les systèmes de racines différents de l'équation finale (104). Dans ce cas, les systèmes de racines des équations données (102), découlent de l'équation :

$${}^2p_{6,7,9,10}z^2 + {}^2p_{6,7,8,10}zu + {}^2p_{6,7,8,9}u^2 = 0 \dots\dots\dots (112),$$

l'équation (107) et la troisième équation (102).

3. Les systèmes de racines superflus.

§ 41. La méthode qui permet d'exprimer les systèmes de racines superflus en fonction des systèmes de racines qu'on peut regarder comme indépendants, ne diffère pas de celle appliquée dans le cas de deux équations homogènes à trois variables.

Nous nous bornerons par rapport à ce sujet à la détermination du huitième système de racines des trois équations homogènes du second degré à quatre variables :

$$\left. \begin{aligned} a_1x^2 + a_2xy + a_3xz + a_4xu + a_5y^2 + a_6yz + a_7yu + a_8z^2 + a_9zu + a_{10}u^2 &= 0, \\ b_1x^2 + b_2xy + b_3xz + b_4xu + b_5y^2 + b_6yz + b_7yu + b_8z^2 + b_9zu + b_{10}u^2 &= 0, \\ c_1x^2 + c_2xy + c_3xz + c_4xu + c_5y^2 + c_6yz + c_7yu + c_8z^2 + c_9zu + c_{10}u^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (113)$$

en fonction des sept autres systèmes de racines de ces équations.

Les produits des éléments correspondants des huit systèmes de racines de ces équations forment une proportion avec les résultants des équations que l'on obtient en égalant à zéro l'une des variables.

On obtient donc l'égalité :

$$\frac{x_1x_2\dots x_7x_8}{R_{x=0}} = \frac{y_1y_2\dots y_7y_8}{R_{y=0}} = \frac{z_1z_2\dots z_7z_8}{R_{z=0}} = \frac{u_1u_2\dots u_7u_8}{R_{u=0}} \dots (114),$$

dans laquelle $R_{x=0}$ représente le résultant des équations :

$$\left. \begin{aligned} a_5y^2 + a_6yz + a_7yu + a_8z^2 + a_9zu + a_{10}u^2 &= 0, \\ b_5y^2 + b_6yz + b_7yu + b_8z^2 + b_9zu + b_{10}u^2 &= 0, \\ c_5y^2 + c_6yz + c_7yu + c_8z^2 + c_9zu + c_{10}u^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (115),$$

et ainsi de suite.

Par l'application de la méthode de Sylvester on obtient pour les susdits résultants des formes composées de déterminants de l'assemblant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 \\ a_7 & b_7 & c_7 \\ a_8 & b_8 & c_8 \\ a_9 & b_9 & c_9 \\ a_{10} & b_{10} & c_{10} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (116).$$

En remplaçant ces déterminants par les déterminants supplémentaires de l'assemblant des sept systèmes de racines indépendants :

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 & x_7^2 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_4y_4 & x_5y_5 & x_6y_6 & x_7y_7 \\ x_1z_1 & x_2z_2 & x_3z_3 & x_4z_4 & x_5z_5 & x_6z_6 & x_7z_7 \\ x_1u_1 & x_2u_2 & x_3u_3 & x_4u_4 & x_5u_5 & x_6u_6 & x_7u_7 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 & y_6^2 & y_7^2 \\ y_1z_1 & y_2z_2 & y_3z_3 & y_4z_4 & y_5z_5 & y_6z_6 & y_7z_7 \\ y_1u_1 & y_2u_2 & y_3u_3 & y_4u_4 & y_5u_5 & y_6u_6 & y_7u_7 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 & z_5^2 & z_6^2 & z_7^2 \\ z_1u_1 & z_2u_2 & z_3u_3 & z_4u_4 & z_5u_5 & z_6u_6 & z_7u_7 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 & u_5^2 & u_6^2 & u_7^2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (117),$$

on obtient des expressions du 56^{ième} degré pour les produits des éléments correspondants des huit systèmes de racines, d'où l'on peut déduire immédiatement les valeurs de x_8 , y_8 , z_8 , u_8 en fonction des sept autres systèmes de racines des équations données (113).

ERRATA

du mémoire „L'équation finale”.

Page 12, dans le § 14 au lieu de k , lisez lm .

„ 57, ligne 2, et page 3, ligne 3 d'en bas au lieu binominaux, lisez: binomiaux.

„ 59, au lieu des lignes 6 et 5 d'en bas, lisez:

Le degré des équations finales est égal au produit des degrés des équations données; le degré des équations terminales ne peut être pris inférieur à la moitié de ce nombre; tandis que le degré des autres équations résultantes ne doit pas être pris inférieur à la somme des degrés des équations données diminuée de n unités. Le nombre des termes de ces équations résultantes est égal au produit des degrés des équations données augmenté d'une unité, quel que soit le degré de la fonction H .

Page 60, ligne 17 d'en bas, au lieu de $p—q$, lisez q .

„ 60, au lieu des lignes 4 et 3 d'en bas, lisez:

Dans ce cas, ordonnant l'équation terminale considérée d'après les puissances descendantes de la troisième variable, les coefficients de ses deux termes s'annulent.

Page 61, ligne 4, au lieu des mots „de l'équation finale” lisez: des autres équations résultantes.

La distribution de la lumière galactique,
comparée à la distribution des étoiles cataloguées,
dans la Voie lactée boréale

PAR

C. EASTON

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE)

Deel VIII. N° 3.

(Avec 2 planches)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
1903

TABLE DES MATIÈRES.

I. Distribution de la lumière galactique dans la Voie lactée boréale, divisée en 108 rectangles; distribution des étoiles de la „Bonner Durchmusterung” par rapport aux mêmes divisions.

- § 1. Plan général des recherches.
- § 2. Intensité de la lumière galactique et condensation des étoiles très faibles. — Classification des étoiles cataloguées.
- § 3. Division de la zone galactique boréale en rectangles. — Les „aires” de STRATONOFF.
- § 4. Représentation numérique de la distribution de la lumière galactique.
- § 5. La Carte isophotique.
- § 6. Discussion de la méthode de réduction des données consignées dans la carte.
- § 7. Détermination de l'intervalle d entre les isophotes, à l'aide de dénombrements sur un cliché photographique.
- § 8. Application de la méthode à la détermination de l'éclat total galactique de chaque rectangle. — La méthode est-elle d'une exactitude suffisante au but?
- § 9. Détermination de la densité stellaire pour les quatre groupes de la *B. D.*, dans les rectangles.
- § 10. Tableau comparatif des densités moyennes des étoiles d'ARGELANDER et de la lumière galactique, entre 0° et 180° long. gal. et $-18^\circ + 18^\circ$ lat. gal.

II. Discussion du tableau comparatif.

- § 11. Résultats envisagés par rapport à la zone entière, et à chaque division.
- § 12. Traits généraux de la distribution des cinq groupes. — Tableau des „prépondérances”.
- § 13. La question de la corrélation générale entre l'éclat de la Voie lactée et la distribution des étoiles de la *B. D.*
- § 14. Distribution par rapport à la latitude et à la longitude galactiques.
- § 15. Condensation de la lumière galactique vers l'équateur galactique dans les diverses parties de la zone; traits généraux de la distribution de la lumière en longitude galactique. — Indications de plans galactiques différents pour les différents groupes stellaires et les diverses parties de la zone.
- § 16. Modification du caractère de la distribution avec le décroissement de la grandeur stellaire.
- § 17. Disposition des densités prépondérantes autour d'une région fortement condensée, dans la région maximale Cassiopeia — Aquila.
- § 18. Relations entre les densités d'un même rectangle. — „Types de distribution”.
- § 19. Manière dont la densité change d'un groupe à un autre. — En général, pour les quatre groupes de la *B. D.*, la densité augmente avec l'accroissement de l'intensité de la lumière galactique, et d'autant plus fortement que le groupe consiste d'étoiles plus faibles.

III. Conclusions.

- § 20. Points de départ fournies par les recherches antérieures.
- § 21. Les accumulations de la Voie lactée ont assez de cohérence, elles ne sont pas éparpillées dans l'espace et ne pénètrent guère dans le voisinage du Soleil.
- § 22. En général les condensations de la Voie lactée paraissent correspondre à de véritables accumulations stellaires; on peut regarder les zones galactiques comme des couches d'étoiles plus ou moins irrégulièrement condensées, et la

structure apparente de la Voie lactée s'explique assez bien par cette seule supposition.

[Indices de superposition apparente de couches et accumulations stellaires. — Profondeur relativement peu considérable de certaines régions galactiques.]

- § 23. Le „clustering power” embrasse les grandes masses stellaires. Le Max. maximorum dans Cygnus.
 - § 24. Cependant il n'est pas possible d'expliquer plausiblement certaines particularités qui se sont révélées au cours des recherches présentes, sans recourir à des suppositions relatives à la distance.
 - § 25. Les relations entre certaines agglomérations galactiques résultent déjà de l'aspect visuel et photographique de la Voie lactée. — Quelques parties qui paraissent juxtaposées, doivent en réalité se trouver à des distances très différentes, et quelquefois des parties situées à des distances diverses sont superposées en apparence.
 - § 26. La fréquence relative des étoiles des différentes grandeurs dans l'espace, trouvée par KAPTEYN, et la distance inégale des deux branches de la Voie lactée dans Cygnus et Aquila.
 - § 27. Relation de la forte agglomération stellaire dans Cygnus avec les étoiles environnantes.
 - § 28. Résumé: Une condensation galactique centrale, d'où émanent des courants stellaires qui, en partie, entourent le Soleil.
-

I.

§ 1. — L'absence de données numériques sur la distribution des étoiles des divers ordres d'éclat dans la zone galactique pouvait entraîner des inconvénients sérieux pour les recherches, au cours desquelles il fallait s'occuper du groupement des étoiles ou autres objets célestes par rapport au plan de la Voie lactée. C'était le cas, non seulement pour les études spéciales, telles que les recherches d'ESPIN sur la distribution des types spectraux IV et III (*Astrophysical Journal*, X, 3 Oct. 1899) mais encore pour l'investigation de certains problèmes d'un ordre général — les erreurs d'estimation des grandeurs, dépendant de la densité stellaire; le groupement des mouvement propres; la question d'un rapport systématique entre la couleur des étoiles et leurs distances de la Voie lactée; la distribution des amas stellaires et des nébuleuses, etc.

Pour la distribution des étoiles de la *Bonner Durchmusterung* dans la Voie lactée nous possédons, il est vrai, les publications de PLASSMANN (*Mitteilungen d. Verein v. Freunde der Astronomie*, 1893; *Himmelskunde*, 1898, p. 498) et de STRATONOFF (*Public. Observ. Taschkent* II, Etudes sur la structure de l'Univers, I, 1900). PLASSMANN a calculé une „Voie lactée théorique” pour les étoiles d'ARGELANDER; STRATONOFF a continué l'investigation bien connue de SCHIAPARELLI pour ces mêmes étoiles: il donne des cartes pour la distribution de chaque demi-grandeur de la *B. D.* Mais — ainsi que l'a déjà fait remarquer W. DE SITTER (*Discussion of Heliumeter Observations*, etc. 1901 — des dénombrements si détaillés ont peu de valeur, à moins d'avoir été corrigés avec soin pour les erreurs systématiques des grandeurs d'ARGELANDER. En outre, les étoiles de la *B. D.* ne forment qu'une fraction peu considérable de l'ensemble des étoiles accessibles à l'observation, mais non cataloguées. Et la classification des étoiles du grand Catalogue photographique international, qui étendra notre connaissance des positions des étoiles considérablement en dehors des limites de la *B. D.*, se fera sans doute attendre longtemps encore.

Aussi avais-je songé plusieurs fois à continuer et compléter le

travail statistique, dont il a été publié quelques échantillons dans les *Verslagen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam, afd. Wisk.* 1894/95 p. 183 (*Astr. Nachr.* N°. 3270), mais l'immense travail que cela aurait entraîné n'était nullement en proportion avec le degré très restreint d'exactitude, accessible avec la *Durchmusterung*. C'est pourquoi je pris la décision de procéder d'une façon plus globale, en comparant l'intensité de la lumière galactique dans l'hémisphère boréal à la distribution des étoiles de la *B. D.*, groupées seulement dans un petit nombre de classes — bien qu'il fût impossible de traiter l'hémisphère austral d'une manière analogue.

L'exécution d'un pareil travail m'a paru d'autant plus désirable, que la comparaison des résultats obtenus pour toute la zone pourrait peut-être mener à des conclusions d'une certaine valeur relativement à la constitution du système galactique.

§ 2. Quant à la représentation de la Voie lactée selon les observations faites à l'oeil nu, il serait impossible jusqu'ici de concilier les observations des différents auteurs quant aux détails; mais en ce qui concerne les grands traits de l'image galactique, le désaccord est plutôt apparent que réel. Les divergences tiennent surtout à ce que les uns ont voulu dessiner tous les détails visibles dans la Voie lactée, tandis que d'autres se sont appliqués surtout à la comparaison de l'éclat de régions assez étendues de la zone. Quoi qu'il en soit, je suis convaincu que les grandes lignes de l'image galactique sont suffisamment fixées pour pouvoir former la base de recherches pas trop détaillées. Pour plus d'uniformité, j'ai cru devoir me borner à mes propres dessins.

L'intensité de la lumière galactique n'est certainement pas proportionnelle, dans toutes les parties de la zone, au nombre des étoiles < 9.5 ARG., on peut néanmoins admettre que, *prise en général*, la distribution de la lumière galactique correspond approximativement à la distribution de l'ensemble des étoiles très faibles. Il est hors de doute en tout cas, que les étoiles de la *B. D.* sont loin de suffire à la production du phénomène galactique: cela ressort déjà de l'étude de PLASSMANN, d'un travail graphique (qui n'a pas été publié, à ce que je sache) de HOLDEN; de mes recherches antérieures (*A. N.* 3270) et, avec plus d'évidence encore, des recherches qui vont être exposées ici. Entre la „Voie lactée d'ARGELANDER” et la Voie lactée optique, il y a, à côté d'analogies remarquables, des différences très grandes, qu'on est bien forcé d'attribuer à l'influence des étoiles très faibles.

Cette conclusion — que le phénomène de la Voie lactée doit être attribué pour la plus grande partie aux étoiles très faibles, non encore cataloguées — est fortement appuyée par la ressemblance entre les dessins de la Voie lactée et les photographies qui embrassent des régions étendues (p. ex. celles de MAX WOLF, reproduites dans *Knowledge*, 1891, de BARNARD dans l'*Astrophysical Journal*); quelquefois la ressemblance est même frappante: comparez la photographie de BARNARD, du 17 août 1895, région d'Altair, avec la 1^{re} planche de ma *Voie lactée boréale* (Paris, 1893), ou bien la région près de Messier 11, Scutum, photographie prise le 16 août 1895, avec la carte de l'*Uranometria Argentina*. Il va sans dire que l'impression générale qu'on reçoit de ces photographies ne dépend que pour une fraction très minime des étoiles plus brillantes que la 10^e grandeur. Cet accord entre l'observation à l'œil nu et la photographie confirme du reste parfaitement l'opinion exprimée par KAPTEYN: (*Public. Astr. Labor., Groningen*, 8, p. 18, note) que l'énorme condensation des étoiles très faibles vers la Voie lactée, évidente dans les photographies, est bien réelle et n'est pas due seulement à une différence dans la couleur des étoiles, dans la Voie lactée et en dehors de la zone.

Mon travail était en préparation, lorsque parut l'ouvrage de STRATONOFF. Pour le but que je me proposais, le degré d'exactitude des valeurs pour la densité qu'il donne dans l'*Appendice II* de son livre, est amplement suffisante; je pouvais ainsi m'en servir. Seulement, les limites des groupes (demi-grandeurs d'ARGELANDER) n'étant pas constantes — cela a été suffisamment démontré — pour les diverses régions de la zone, j'ai combiné ses classes (qui sont aussi celles de SEELIGER, à peu près) de façon à obtenir des groupes comprenant un très grand nombre d'étoiles; de la sorte l'incertitude des limites serait aussi peu gênante que possible, et les irrégularités purement locales de la distribution n'auraient pas d'influence sensible. Ainsi, les trois cent mille étoiles relativement brillantes d'ARGELANDER furent divisées en quatre groupes seulement, (pour deux groupes tout au moins les limites étaient indiquées d'avance par la nature de la *B. D.*): groupe I embrasse les étoiles de la grandeur 0 — 6.5 ARG.; groupe II, 6.6 — 8.0; groupe III, 8.1 — 9.0; groupe IV, 9.1 — 9.5 ARG.

J'ai dû écarter les travaux d'HERSCHEL, EPSTEIN, CELORIA e. a., concernant les étoiles plus faibles que celles d'ARGELANDER, à cause du caractère fragmentaire de ces travaux, et aussi parce que les régions qu'ils ont choisies ne sont pas distribuées arbitrairement sur la zone galactique.

§ 3. — Pour la comparaison entre la distribution de la lumière galactique et celle des étoiles relativement brillantes, j'ai divisé sur la carte de MARTH (Voy. ci-après, p. 11) la zone galactique boréale en des rectangles mesurant 4° en latitude et 15° en longitude galactiques, de telle sorte que la zone médiane fût coupée en deux par l'équateur galactique (selon MARTH: Pole nord gal. 1850 = α 12^h 40^m δ $+ 30^{\circ}$). Ces divisions ont été choisies afin de morceler le moins possible les taches lumineuses et sombres de la Voie lactée; encore n'était-il possible d'obtenir ce résultat pour la zone entière à moins de sacrifier l'uniformité; ainsi la région remarquable près d' α Cygni se trouve-t-elle éparpillée dans plusieurs rectangles. Mais les traits caractéristiques de l'image galactique ont pu être conservés ainsi. Les divisions ne devaient pas être trop grandes, pour ne pas effacer les formes de la Voie lactée, ni surtout trop petites, mais en tout cas plus étendues que les aires de STRATONOFF, dont 2 à 3 ensemble occupent la superficie d'un de ces „rectangles galactiques”.

La densité stellaire dans ces rectangles, pour chacun des quatre groupes dans lesquels les étoiles d'ARGELANDER avaient été divisées, se calculait alors facilement, et avec une exactitude suffisante, à l'aide des données que STRATONOFF fournit pour les „aires” qui se projettent, en entier ou partiellement, sur ces rectangles. Mais il fallait d'abord exprimer numériquement l'intensité de la Voie lactée pour chaque rectangle.

§ 4. — La superficie d'un rectangle était évidemment trop grande pour qu'on eût pu se contenter d'une simple estimation de l'éclat galactique pour une région d'une telle étendue sur une carte de la Voie lactée, ainsi que j'avais pu le faire, non sans difficulté, dans un travail antérieur, où il s'agissait de régions beaucoup moins étendues. Il fallait trouver une méthode moins arbitraire.

J.-C. HOUZEAU a inauguré, mais seulement esquissé, une méthode pour fixer les traits de l'image galactique (*Annales de l'Observatoire de Bruxelles*, Nouv. Série, I, p. 15). Il a tracé sur la carte des lignes isophotiques, reliant entre elles des régions où la lueur galactique paraît avoir la même intensité, c'est-à-dire que si, de l'extérieur à l'intérieur de la Voie lactée, on passe de la ligne a à la ligne b , puis à c , d , etc., l'éclat de la lueur galactique paraît augmenter chaque fois d'une quantité constante. On peut admettre, en effet, qu'un observateur expérimenté dans l'étude de la Voie lactée (ou des étoiles variables) parviendra à démarquer de pareilles lignes isophotiques avec une exactitude suffisante, et alors on aura

un moyen de computer la quantité de lueur galactique émise par une partie déterminée du ciel.

Appelons i l'intensité de la lueur galactique émise par une région a , où cette lueur est tout juste perceptible distinctement, et d l'intervalle entre l'éclat de deux régions situées entre des lignes isophotiques consécutives, on aura ainsi pour les intensités des endroits $a \dots f$:

a	b	c	d	e	f
i	id	id^2	id^3	id^4	id^5

Pour notre but, la valeur d' i importe peu; mais d devra être déterminé par une méthode photométrique quelconque.

HOUZEAU avait construit ses lignes isophotiques en comparant l'éclat des taches galactiques à celui d'étoiles de la grandeur 6, 5.5, 5 etc., mais je ne crois pas qu'on puisse jamais appliquer convenablement cette méthode, en dehors des taches très lumineuses de la Voie lactée. (Telle est aussi l'opinion de l'observateur bien connu d'étoiles variables et de la Voie lactée, JOSEPH PLASSMANN, à Münster). Mes efforts pour établir, à l'aide d'une méthode photométrique directe, l'intensité de quelques parties de la Voie lactée, n'ont jamais abouti; la comparaison de la Voie lactée avec des surfaces faiblement éclairées, ou avec une voie lactée artificielle, construite à l'aide de points ou de petits disques blancs ou gris sur un fond sombre, ne donnait aucun résultat satisfaisant: sans doute parce que les sources lumineuses n'étaient pas bien comparables entre elles. Il me paraît possible, mais non probable, qu'une méthode analogue à celle dont le prof. MAX WOLF s'est servi pour mesurer l'intensité de la lumière zodiacale, (avec le „Schnittphotometer") ait quelque succès ici.

Après ces essais infructueux, j'ai suivi la méthode décrite dans les pages suivantes.

§ 5. — J'ai d'abord construit la Carte isophotique de la Voie lactée, reproduite ci-après (*Planche II*). Laissant de côté ces régions où la lueur galactique est perceptible, mais souvent douteuse, et en prenant soin de comparer minutieusement l'éclat des parties très écartées de la zone, j'ai choisi six degrés d'intensité, de sorte que les parties comprises entre la première et la seconde courbe isophotique eussent l'éclat a (lueur distincte quoique très faible), celles à l'intérieur de la sixième ligne l'éclat f (lueur la plus brillante). Une série d'observations directes, exécutées dans des saisons différentes afin de pouvoir comparer l'éclat des régions extrêmes de la

zone galactique boréale par l'intermédiaire des régions situées vers le milieu ayant fourni les grands traits du dessin, les détails principaux furent insérés à l'aide de mes cartes de la Voie lactée ¹⁾.

§ 6. — Pour déterminer la valeur d — l'intervalle entre deux degrés d'éclat consécutifs — j'ai dû suivre une voie qui, tout en nécessitant un travail pénible et de longue durée, ne pouvait mener qu'approximativement au but, mais qui, néanmoins, me paraissait décidément préférable aux autres méthodes essayés.

J'ai supposé l'intensité d'une portion donnée de la Voie lactée proportionnelle avec la quantité de lumière émise par toutes les étoiles télescopiques, visibles sur une plaque photographique à longue exposition. Dans ce cas, s'il était possible de compter, sur une telle plaque, toutes les étoiles jusqu'à la plus faible grandeur visible dans un endroit déterminé où la Voie lactée, selon la carte isophotique, a l'éclat f , et d'exprimer l'éclat total Σ de toutes ces étoiles dans l'intensité d'une étoile de la classe la plus faible; si l'on pouvait exécuter le même travail pour un autre endroit, ayant la même superficie, et photographié dans les mêmes conditions, mais situé dans la zone où la Voie lactée a l'éclat b (appelons Σ_1 l'éclat total des étoiles de cet endroit) — alors d sera connu, car

$$(\text{pg. 10, ante}): \frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{d^5}{d}.$$

Les suppositions suivantes étaient nécessaires: a , que la loi de WEBER—FECHNER s'applique à ce cas-ci, où il s'agit de comparer des surfaces lumineuses juste à la limite de la visibilité; b que le rapport entre les sommes de lumière actinique et visuelle soit le même;

¹⁾ La carte céleste sur laquelle ces courbes isophotiques ont été tracées est une „Equal Surface Projection”, exécutée d'après les données de MARTIN (*Monthly Notices R. A. S.* LIII, 2 et 6) par PANNEKOEK en 1896. Vers cette époque, le Dr. PANNEKOEK et moi avons mis des reproductions lithographiées de cette carte à la disposition de ceux qui voudraient faire des observations de la Voie lactée, mais elle est publiée ici pour la première fois.

Dans cette projection, l'équateur galactique est une ligne droite au milieu de la carte; les cercles de longitude et latitude galactiques sont aussi des lignes droites (1° en long. gal. = 5 m.m.). Toutes les étoiles visibles à l'œil nu se trouvent sur la carte, et presque toutes ont reçu une indication. Pour l'insertion de ces lettres ou numéros, une zone marginale mesurant $\frac{1}{4}$ de la largeur de la carte, a été ajoutée de chaque côté; cette marge contient les noms des étoiles à peu près à la place où les étoiles elles-mêmes devraient être dessinées, si l'échelle des latitudes était réduite à la moitié, l'échelle des longitudes restant la même.

Pour indiquer les étoiles, il a été fait usage en premier lieu des lettres de BAYER et des numéros de FLAMSTEED. Pour celles qui manquent dans le catalogue de FLAMSTEED, les nos du British Association Catalogue (mis entre parenthèses) ont servi d'abord, puis ceux de l'atlas de HEIS, *Atlas coelestis novus* (n°. précédé d'une H). Les grandeurs des étoiles — indiquées approximativement — sont celles du General Catalogue de PICKERING.

c, que toutes les étoiles visibles sur la photographie participent à la formation de l'image galactique, et que les étoiles trop faibles pour être séparément visibles sur la plaque, n'ont pas d'influence appréciable, pas plus que la nébulosité qui peut se trouver dans ces régions; *d*, qu'aucune influence appréciable n'est exercée par les images photographiques des étoiles brillantes, assez grandes pour masquer des étoiles petites.

Les objections qui peuvent être portées contre la supposition *b*, sont les plus sérieuses. En effet, les régions riches de la Voie lactée contiennent probablement une proportion excessive d'étoiles dont les rayons sont très actiniques. Et quant à *c*, on n'a certainement pas le droit d'admettre que la limite de sensibilité de notre rétine coïncide exactement avec celle d'une plaque photographique quelconque. Il est à remarquer, toutefois, que les étoiles du premier type spectral, parfaitement comparables entre elles, sont probablement beaucoup plus nombreuses, relativement, dans la Voie lactée qu'en dehors de cette zone; tandis que les régions comparées sont assez petites pour qu'on n'y trouve qu'un très petit nombre d'étoiles relativement brillantes (6° à 9° gr.) qui, par leur type spectral différent, pourraient influencer notablement le rapport cherché. Du reste, au cours de ces recherches (Voy. p. 13), il s'est trouvé que ces étoiles brillantes ne jouent pas un rôle important dans la formation de la lumière totale, et — pour ce qui est des suppositions *c* et *d* — que la part des plus faibles étoiles (< 13.5) est relativement petite: environ $\frac{1}{17}$ dans la région très lumineuse, $\frac{1}{12}$ dans l'autre.

§ 7. Le prof. MAX WOLF ayant obligeamment mis à ma disposition une plaque photographique des environs de γ Cygni (temps de pose $9^h 7^m$, les 29, 30 juin et le 1^r juillet 1894 — plaque N^o. 884 Heidelberg), j'y marquai deux régions de superficie égale, situées à peu près à la même distance du centre de la plaque; l'une (A) dans la zone *f* (très lumineuse) de la carte isophotique — coordonnées pour $1855.0 = \alpha$: $XX^h 2^m 30^s$ à $XX^h 6^m 30^s$; δ : $36^{\circ} + 37^{\circ}$ — l'autre (B) située dans la zone relativement faible *b* = α : $XX^h 18^m 30^s$ à $XX^h 22^m 30^s$; δ : $36^{\circ} + 37^{\circ}$. Dans les deux régions, les étoiles, jusqu'aux plus faibles qu'il était possible de distinguer séparément, furent observées à la loupe et classées par demi-grandeurs; pour cela, prenant comme étoiles de repère les quelques étoiles cataloguées qui s'y trouvent, je choisis d'abord, avec le plus de soin possible, quelques étoiles-types qui me paraissaient être de la grandeur 10.0, 10.5, 11.0 etc., distribuées dans les deux régions; c'est d'après ces étoiles-

types que j'estimai ensuite la grandeur des autres étoiles, et toutes furent insérées sur des cartes à leur position et avec leur grandeur approximatives; après cela seulement, je me mis à les compter. La limite se trouvait être située vers la grandeur (estimée) 14.0. Les nombres comptés dans les deux régions, A (éclat galactique f) et B (éclat galactique b) se trouvent dans la 1^{re} et 3^e col. du Tableau I; dans la 2^e et 4^e on trouve l'éclat total des étoiles de chaque classe, l'éclat d'une étoile de la dernière classe étant pris comme unité.

Tableau I.

Grandeur estimée.	1	2	3	4
	A, étoiles.	A, éclat.	B, étoiles.	B, éclat.
7.6— 8.0	1	243	—	—
8.1— 8.5	6	923	5	308
8.6— 9.0	6	584	—	—
9.1— 9.5	17	1048	2	308
9.6—10.0	42	1639	9	351
10.1—10.5	61	1509	15	371
10.6—11.0	103	1613	30	470
11.1—11.5	135	1338	42	416
11.6—12.0	134	840	52	326
12.1—12.5	141	560	52	206
12.6—13.0	188	472	67	168
13.1—13.5	229	362	94	149
13.6—14.0	697	697	273	273
Total	1760	11,828	641	3346

Les nombres pour la dernière classe, 13,6—14,0, sont probablement beaucoup trop élevés: dans cette classe, à la limite de la visibilité, il a été incorporé sans doute beaucoup d'étoiles qui appartaient en réalité aux classes avoisinantes. Quant au maximum dans le nombre des étoiles qui semble se produire, pour les deux régions, vers la 11^e grandeur; il est possible qu'il tienne en partie à une erreur dans l'estimation de l'intervalle entre l'éclat des étoiles-types, mais il me paraît peu probable que cette cause

suffise à l'expliquer; du reste, les régions explorées ici ont trop peu d'étendue pour qu'on puisse baser sur ces nombres des considérations d'un ordre général. En tout cas, pour ce qui est de ces deux régions, la moitié environ de la quantité totale de la lumière est due aux grandeurs 9.6 à 11.5 et il est facile à voir que même des erreurs importantes dans l'estimation des étoiles-types des classes inférieures ne suffiraient pas pour faire contrebalancer cette part prédominante que les étoiles de la 9^e à la 12^e grandeur prennent dans la production de la lueur galactique, du moins dans cette partie du ciel.

Des totaux des colonnes 2 et 4, il s'ensuit que $\log. d = 0,1371$, que i , l'intensité de la région la plus faible a , s'exprime par 2440 étoiles de la grandeur estimée 14.0, sur la superficie A ou B , et que les rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{e}{a}, \frac{f}{a}$, sont, approximativement de

$$1.37 \quad 1.88 \quad 2.58 \quad 3.53 \quad 4.85^1)$$

¹⁾ Comparons cette valeur, 1 : 4,85, trouvée ici pour le rapport entre l'intensité des parties les plus lumineuses et les plus faibles de la Voie lactée, à celle qui résulte du travail d'HOUEAU. Cet astronome trouva que les taches éclatantes de la Voie lactée deviennent invisibles dans le crépuscule en même temps que les étoiles de la grandeur 4 ou 4,5. Quant aux parties les plus faibles, elles s'effacent naturellement en même temps que les étoiles qui sont à la limite de la visibilité à l'oeil nu, et qu'HOUEAU estime 6,5. La différence, deux grandeurs, donne pour le rapport $\frac{f}{a}$ selon HOUEAU :

$$(2,512)^2 = 6,31.$$

La divergence n'est déjà pas considérable. Mais les étoiles les plus faibles qui sont encore distinctement visibles ont plutôt la grandeur 6,2, et d'autre part, HOUEAU, qui observait les étoiles des deux hémisphères, prenait aussi en considération les taches dans Scutum et Sagittarius, qui sont un peu plus brillantes que celle de Cygnus (d'ailleurs les valeurs d'HOUEAU pour les taches de Cygnus sont certainement trop faibles). Ces deux considérations tendent à rapprocher les conclusions des deux recherches d'une manière amplement suffisante, eu égard à la différence entre les méthodes et le degré d'exactitude très restreint qu'on peut en attendre.

Récemment, au cours d'un travail intéressant: „A rude attempt to determine the total light of all the stars” (*Astrophys. Journal*, Dec. 1901), le prof. NEWCOMB a étudié la question de l'intensité des taches galactiques. Il compare l'éclat de ces taches avec la lueur émise par le fond du ciel, en dehors de la Voie lactée, et trouve qu'une étoile de la 5^e grandeur, dont la lumière est étendue uniformément sur une surface circulaire ayant un diamètre d'un degré, produit la même intensité que le fond du ciel; ensuite que les taches brillantes de la Voie lactée ont une intensité 2,28 fois plus grande.

Exprimée en étoiles de la 14^e grandeur (estimée), cela donnerait pour la lueur du fond du ciel env. 3500, et sur la plaque photographique nous avons trouvé, pour la même surface, environ 2500 dans les régions où la lumière galactique est très faible (a) et environ 10 000 là où cette lumière atteint le degré e , lequel correspond probablement aux „taches brillantes” de NEWCOMB. A ces deux dernières valeurs il faut ajouter l'intensité du fond

§ 8. Il ne restait plus alors qu'à calculer, pour chaque rectangle, quelle partie de sa superficie est occupée par une lueur galactique de l'intensité f , e , d , etc., et à réduire le tout à l'intensité a , à l'aide des coefficients que je viens d'indiquer; on obtenait ainsi des valeurs représentant la quantité de lueur galactique émise par chaque rectangle, considéré comme une surface lumineuse homogène. Si l'on trouve, par exemple, que dans un certain rectangle (superficie 60 degrés carrés), 21 d. c. sont sans lueur galactique appréciable, 15 d. c. ont un éclat galactique a , 7 un éclat galactique b , 5 c , 4 d , 5 e , et 3 f , alors l'intensité totale sera de $15 + 7 \times 1.37 + 5 \times 1.88 + 4 \times 2.58 + 5 \times 3.53 + 3 \times 4.85 = 76.51$. Mettons pour la moyenne des valeurs obtenues ainsi pour tous les rectangles 70.15; l'intensité galactique du rectangle pris comme exemple sera alors de 1.09, un peu au-dessus de la moyenne. C'est de cette manière qu'a été calculée la dernière valeur dans chaque rectangle, Tableau II.

Il se présente encore une objection. On n'a aucune certitude que les étoiles, estimées de la 12^e, 13^e, 14^e grandeur sur la plaque photographique, aient réellement cette grandeur dans l'échelle photométrique, et pourtant, dans la computation de la quantité totale de la lumière émise par les régions A et B, j'ai admis que

du ciel, de sorte que la proportion c (fond du ciel): a (lum. gal. faible): e (lum. gal. intense) serait de 3500 : 6000 : 13500, ainsi $\frac{e}{c} = 4$ environ, selon nos recherches.

Celles de NEWCOMB donnent $\frac{22,8}{9} = 2,5$ environ. Ce sont là, en tout cas, des valeurs du même ordre, et assez concordantes, tout considéré.

Il se présente pourtant une difficulté. Si la valeur absolue que NEWCOMB trouve pour lum. gal. e est de 1,38 (2,28 — 0,90), sa valeur pour lum. gal. a serait (Voy, plus haut, pg. 14) de 1,38 : 3,53 = 0,4, et sa proportion $c : a$ 0,9 : (0,4 + 0,9), ce qui donnerait pour la Voie lactée une valeur-limite, un „Schwellenwerth” de presque $\frac{1}{2}$. Or, s'il y a quelque analogie, physiologiquement, entre le phénomène de la visibilité de la Voie lactée sur le fond du ciel et celui de la différence entre l'éclat légèrement différent de deux surfaces faiblement illuminées (et le fond du ciel est assez lumineux, relativement), alors on aurait pu attendre une valeur beaucoup plus petite pour le „Schwellenwerth”. Mais cette question, qui me paraît intéressante en elle-même, n'est plus dans le cadre des recherches présentes.

Pendant la révision des épreuves, un article de G. J. BURNS sur le même sujet a paru dans l'*Astrophysical Journal*, XVI, 3. L'auteur trouve pour la lueur du fond du ciel une valeur plus grande que NEWCOMB; d'après ses recherches la proportion $\frac{e}{c}$ serait de 3 environ — résultat intermédiaire, ainsi qu'on le voit, entre celui de NEWCOMB et le nôtre. La proposition $\frac{c}{a}$ serait, selon BURNS, de $\frac{1}{2}$.

la proportion Δ entre deux demi-grandeurs estimées était de 1.58. ainsi la quantité totale dans A, Σ_a , fut calculée de la façon suivante: $697 + 1.58 \times 229 + (1.58)^2 188 + (1.58)^3 141 \dots + (1.58)^{11} 6 + (1.58)^{12}$. De même la quantité totale dans B, $\Sigma_b = 273 + 1.58 \times 94 \dots + (1.58)^{11} 5$. Il est extrêmement probable que les valeurs ainsi trouvées ne sont pas exactes. Cependant, pour le but que nous nous proposons, cela importe peu, car nous n'avons qu'à nous occuper du rapport $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_b}$, qui ne change pas lorsqu'une autre valeur, Δ_1 , est substituée à Δ , pourvu que Δ_1 soit à peu près constante, ce qui est probablement le cas, les évaluations de la grandeur ayant été faites avec le plus de soin possible. Or, Δ_1 est inconnu, mais si les rapports entre les nombres 697, 229, 188 etc., trouvés pour les étoiles de la gr. 14, 13,5 etc. dans A, ne sont pas trop disproportionnés à ceux des nombres 273, 94, 67 etc., trouvés dans B, le rapport $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_b}$ ne dépendra de Δ que dans une faible mesure, et pour notre but, l'incertitude dans la détermination des grandeurs sur la plaque photographique n'aura donc pas un effet important.

Il va de soi que ces valeurs obtenues pour l'intensité de la lumière galactique dans les diverses parties de la zone, ne sont pas directement comparables à celles qui indiquent la distribution des étoiles: elles serviront surtout à indiquer les lieux où la distribution des étoiles faibles s'écarte sensiblement de celle des étoiles cataloguées.

§ 9. — Afin de trouver les densités stellaires pour les 4 groupes de la *B. D.* (ante, p. 8) dans ces mêmes rectangles, le réseau des coordonnées ordinaires, où les aires de STRATONOFF avaient été marquées, fut projeté sur la zone galactique (d'après MARTH, *Monthly Notices R. A. S.* Vol. LIII N^o. 2); pour chaque rectangle, la densité de l'un de nos groupes I, II, III, IV ARG. résultait de la combinaison des densités correspondantes dans les aires de STRATONOFF qui s'y projetaient.

Mettons, pour donner un exemple, que sur un rectangle — superficie: 60 degrés carrés — se projettent, partiellement, cinq „aires” de STRATONOFF, les n^{os} 16, 17, 38, 39 et 40, qui en occupent la superficie dans la proportion suivante:

N°. 16	6 d. carrés;	proportion	0,1
„ 17	3	„	0,05
„ 38	15	„	0,25
„ 39	30	„	0,5
„ 40	6	„	0,1

Les densités pour le groupe I ont, dans ces aires, respectivement les valeurs qui suivent (disons): 0,17, 0,32, 0,20, 0,17, 0,35; et ces valeurs entrent dans la composition de la densité moyenne pour ce groupe, dans le rectangle, ainsi qu'il suit: 0,017, 0,016, 0,050, 0,085, 0,035, total: 0,20, ce nombre représente ainsi la densité moyenne du groupe I dans ce rectangle.

Pour les autres groupes, une computation analogue fut faite; ensuite, pour chaque groupe, les valeurs résultantes furent exprimées dans la moyenne pour tous les rectangles de l'hémisphère boréal. Soit 0,26 cette moyenne pour le groupe I, la densité relative dans le rectangle sera, pour ce groupe, de 0,77.

Les valeurs moyennes pouvaient être contrôlées à l'aide de celles qu'on déduit facilement des données fournies par SEELIGER (*Sitzungs-Berichte Akad. München*, 1884, p. 544) combinées d'une façon analogue. Le résultat était très satisfaisant: des données de STRATONOFF je trouvai, pour les rectangles situés entre -14° et $+14^{\circ}$ (afin d'exclure les régions extérieures où l'éclat galactique atteint rarement la valeur a): groupe I dens. moy.: 0,26, II 1,50, III 5,5, IV 16,9; les dénombrements de SEELIGER donnèrent, pour la zone de -15° à $+15^{\circ}$ lat. gal.: I 0,2640; II 1,5183, III 5,5060; IV 16,8337.

§ 10. Dans chaque rectangle du tableau suivant (II) le premier nombre représente la densité relative du I^r groupe (0—6.5 Arg.), le second celle du II^d groupe, (6.6—8.0), le 3^{me} groupe III (8.1—9.0), le 4^{me} groupe IV (9.1—9.5), le 5^{me} l'intensité relative de la lumière galactique. Les bandes -14° à -18° lat. gal., et $+14^{\circ}$ à $+18^{\circ}$ lat. gal., où les valeurs ont été calculées sur les mêmes moyennes, ont été ajoutées pour faciliter la comparaison, bien qu'elles tombent en dehors de la zone galactique proprement dite.

Tableau II.

*Densités moyennes des étoiles d'Argelander (groupes I—IV)
et de la lumière galactique, dans la Voie lactée boréale.*

180° à 90° long. gal.

-18	0								+18
180									180
	1.42	0.81	0.96	0.73	0.73	0.58	0.65	0.58	0.69
	0.83	0.56	0.63	0.73	0.82	0.67	0.75	0.73	0.60
	0.9	0.8	0.9	1.1	1.4	1.2	1.1	1.1	0.9
	0.8	0.8	0.9	1.3	1.3	1.3	1.2	1.1	0.9
	0.13	0.35	0.58	1.22	1.44	1.34	1.14	0.80	0.60
165									165
	0.73	0.62	1.15	1.00	0.81	1.04	0.54	0.69	0.77
	0.63	0.53	0.56	0.73	0.85	0.90	1.01	0.79	0.81
	0.7	0.7	0.7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9
	0.7	0.7	0.9	1.1	1.3	1.3	1.3	1.2	1.0
	0.36	0.56	1.14	1.13	1.35	1.42	1.26	1.17	0.79
150									150
	1.73	0.92	0.81	0.73	0.58	0.77	0.69	0.50	0.81
	0.53	0.39	0.43	0.51	0.99	1.05	1.03	1.07	1.16
	0.4	0.4	0.5	0.5	1.0	1.1	1.0	1.0	0.9
	0.5	0.5	0.5	0.5	1.1	1.2	1.0	1.0	0.8
	0.18	0.34	0.35	0.12	1.00	1.84	1.21	0.62	0.28
135									135
	0.88	1.04	1.04	0.69	1.12	0.85	0.69	0.92	1.08
	0.73	0.78	0.97	0.88	0.93	0.93	0.81	0.79	0.73
	0.6	0.7	0.7	0.7	0.8	0.9	0.8	0.6	0.7
	0.5	0.6	0.6	0.7	0.9	0.9	0.7	0.5	0.5
	0.21	0.56	0.56	0.69	1.10	1.02	0.55	0.07	0.06
120									120
	0.92	0.77	1.08	1.73	1.12	0.96	0.88	0.85	0.62
	1.01	0.96	0.97	0.90	0.89	0.88	0.71	0.69	0.71
	0.9	0.9	0.9	0.7	0.8	0.7	0.8	0.5	0.5
	0.8	0.8	0.8	0.7	0.8	0.6	0.6	0.4	0.4
	0.04	0.64	1.05	0.90	0.49	0.78	0.76	0.21	0.12
105									105
	1.31	1.00	0.85	1.08	1.20	1.15	0.81	1.04	1.23
	0.98	0.83	1.01	1.10	1.39	1.15	0.77	0.81	0.81
	0.9	1.1	1.0	1.1	1.3	1.0	0.7	0.6	0.5
	0.7	1.1	1.1	1.1	1.2	1.0	0.6	0.5	0.4
	0.34	0.89	1.00	1.38	1.42	0.85	0.49	0.20	0.03
90									90

Tableau II.
(Suite)

90° à 0° long. gal.

—18									+18
90									90
	1.08	1.20	1.08	0.96	1.38	1.62	1.00	1.04	0.88
	1.05	1.34	1.25	1.30	1.38	1.28	1.13	1.19	0.95
	0.9	1.3	1.3	1.2	1.0	1.0	0.7	0.7	0.5
	0.9	1.2	1.0	1.0	0.9	0.9	0.7	0.6	0.5
	0.25	0.89	1.12	1.44	1.47	0.90	0.53	0.62	0.19
75									75
	1.58	1.42	1.08	0.96	1.50	1.31	1.70	1.42	1.04
	1.02	1.15	1.43	1.30	1.35	1.29	1.51	1.35	0.91
	0.9	1.1	1.4	1.3	1.3	1.1	0.9	0.9	0.8
	0.9	1.0	1.2	1.5	1.2	0.9	0.7	0.7	0.6
	0.07	0.84	1.21	1.72	2.22	0.90	1.16	0.82	0.27
60									60
	0.50	0.65	1.12	1.46	1.70	1.81	1.58	1.31	1.70
	0.91	1.05	1.33	1.27	1.54	1.59	1.31	1.17	1.02
	0.9	1.0	1.2	1.4	1.5	1.3	1.3	1.2	1.2
	0.8	0.9	1.2	1.4	1.2	1.2	1.2	1.0	1.0
	0.15	0.91	1.49	1.58	1.58	1.23	1.40	1.29	0.70
45									45
	0.88	0.81	1.00	1.50	1.00	1.38	1.23	1.35	1.08
	0.77	0.92	0.96	1.03	1.44	1.46	1.45	1.35	1.29
	0.8	0.9	1.1	1.3	1.6	1.6	1.4	1.4	1.2
	0.8	1.0	1.2	1.2	1.4	1.5	1.5	1.4	1.1
	0.01	0.93	1.41	0.79	1.27	2.78	1.74	0.92	0.26
30									30
	1.04	1.04	1.08	1.42	1.31	1.20	1.20	1.12	0.88
	0.65	0.88	1.04	1.04	1.15	1.10	0.93	0.93	0.87
	1.0	0.9	1.1	1.1	1.1	0.9	1.1	1.0	0.9
	0.9	1.0	1.1	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1	0.9
	0.23	1.05	1.52	1.91	0.61	0.99	1.20	0.89	0.77
15									15
	0.46	0.35	0.38	0.81	0.88	0.73	0.92	0.85	0.65
	0.61	0.64	0.66	0.75	0.82	0.90	0.95	0.98	0.70
	0.7	0.8	0.9	0.8	0.8	0.9	1.0	0.9	0.8
	0.8	1.0	1.0	1.0	0.9	1.2	1.3	1.2	1.0
	0.07	0.84	1.57	1.43	0.63	1.53	1.19	0.83	0.61
0									0
—18									+18

II.

§ 11. — On peut envisager le résultat de ces recherches de plusieurs manières; d'une part en considérant pour chaque groupe stellaire la distribution; d'autre part en comparant pour chaque rectangle les densités des différents groupes.

§ 12. — *Traits généraux de la distribution des cinq groupes.*

Une certaine analogie entre la distribution des quatre groupes stellaires et de la lumière galactique (*Planche I*) saute aux yeux. Pour tous les groupes, la région maximale se trouve pour la plus grande partie dans la moitié inférieure — 0° à 90° long. gal. — de la zone boréale, et le maximum absolu entre 30° et 60° long. gal., et — 2 et $+10^\circ$ lat. galactique.

Il paraît tout naturel que les traits caractéristiques de la distribution des groupes stellaires ressemblent d'autant plus à ceux de la Voie lactée, que le groupe se compose d'étoiles plus faibles (Comp. le rapport $\frac{A}{F}$, pg. 33).

Entre le type du groupe I et le type galactique G, le changement ne va pas régulièrement: la transition est le plus brusque du premier groupe au second. Les maxima entre 60° et 90° long. gal., qui se trouvent au sud de l'équateur galactique pour les groupes III et IV et pour G, mais au nord pour le groupe I, tombent juste sur l'équateur, pour le groupe II. Tandis que pour III et IV un maximum secondaire assez important se voit dans Monoceros et Auriga, il s'étend là, pour le I^r groupe, une région presque ininterrompue de faible densité; dans II il s'y manifeste un maximum peu important. En outre, pour II nous voyons déjà se produire les deux régions minimales dans Taurus (le minimum absolu du groupe se trouve même ici) et dans Camelopardalus, qui vont s'étendre et se confondent de plus en plus et, pour III, IV et G, produisent le phénomène qui, avec l'énorme condensation vers Cygnus, est le trait le plus caractéristique de la distribution des étoiles dans la Voie lactée boréale: la région pauvre qui s'étend à travers Perseus et Auriga, sous un angle de 40° environ, et où

la densité de la lumière de la Voie lactée, même sur l'équateur galactique, a un minimum de 0.49. Là où se trouve le minimum absolu du groupe I, vers 7° long. gal. et -12° lat. gal., on ne voit plus, dans II, qu'un minimum peu important, qui ne tarde pas à disparaître. Un des traits caractéristiques de la distribution stellaire en général: la transition brusque entre la région maximale dans Cygnus et Vulpecula, et la région pauvre au sud de l'équateur galactique — STRATONOFF l'a indiqué, avec plusieurs autres particularités de la distribution stellaire — se voit déjà dans le II^d groupe.

Les traits caractéristiques de la distribution peuvent être mis en évidence de la manière suivante. Dans chaque rectangle, on choisit le groupe dont la densité est plus forte que celle des autres groupes; le rectangle est indiqué par le chiffre du groupe qui y exerce ce que je voudrais appeler la prépondérance relative. La distribution des rectangles où un certain groupe exerce la prépondérance est différente de la distribution des maxima du groupe: ce n'est pas tant le *degré* de condensation, que le caractère de la condensation propre au groupe, qui la détermine. Il va sans dire que si les étoiles étaient uniformément distribuées; aucune prépondérance ne se manifesterait, mais elle ne se présenterait pas non plus, si les étoiles de tous les groupes se condensaient d'une manière identique.

Naturellement on ne doit attacher aucune importance à une différence très légère entre deux valeurs pour la densité, c'est pourquoi j'ai cru devoir indiquer aussi, dans le tableau qui va suivre, le groupe dont la densité vient en second lieu; du reste il a été tenu compte des cas où la plus grande densité pouvait appartenir à l'un de deux ou même de trois groupes, dont les densités ne se distinguaient pas nettement entre elles. Les valeurs obtenues pour l'intensité de la lumière galactique n'ont pas été incorporées dans la table, seulement il a été ajouté un *m* au bas des autres chiffres dans ces rectangles où la prépondérance des faibles étoiles de la Voie lactée paraissait probable.

Les „chiffres de prépondérance” ont été indiqués pour 108 rectangles, entre -18° et $+18^{\circ}$ lat. gal.; là où la densité surpasse 1.25 dans les groupes I et II, 1.2 dans les groupes III et IV, les chiffres sont soulignés. Les maxima absolus sont marqués d'un astérique. Dans quelques rectangles, un trait indique que la densité du I^r et du II^d, ou du II^d et du III^e groupe est sensiblement la même. — (Pour la région comprise entre des traits forts, voir pp. 28 en 30).

Tableau III

Prépondérance d'un des quatre groupes d'Argelander.

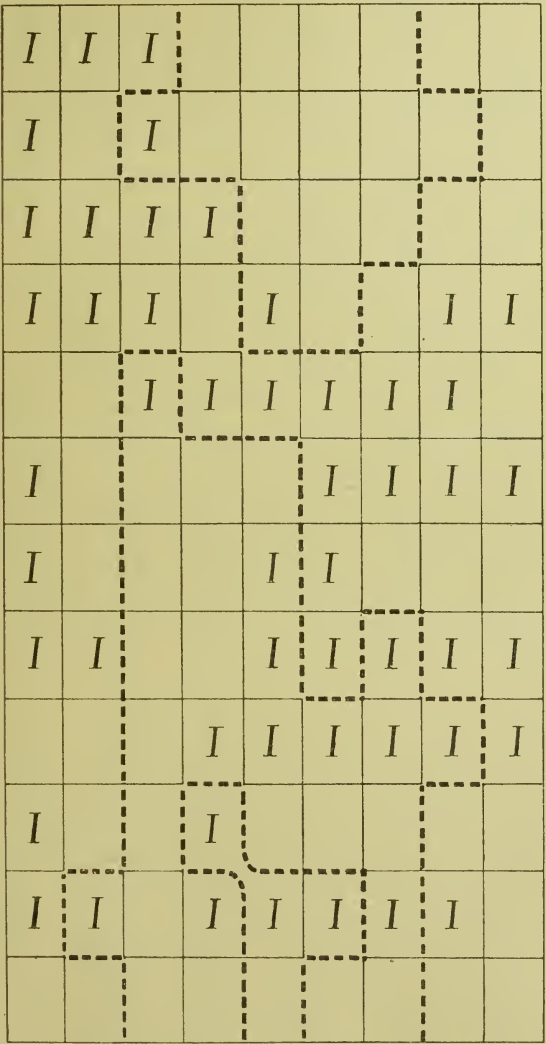
-18		0								+18		
180										180		
		<u>I</u> III	<u>I</u> III, IV	<u>I</u> III, IV	<u>IV</u> <u>III</u>	<u>III</u> <u>IV</u>	<u>IV</u> <u>III</u>	<u>IV</u> <u>III</u>	<u>III, IV</u>	<u>III, IV</u>	165	
		<u>I, III, IV</u>	<u>III, IV</u>	<u>I</u> IV	<u>IV</u> I, III	<u>IV</u> <u>III</u>	<u>IV</u> I, <u>III</u> (m)	<u>IV</u> II, <u>III</u>	<u>IV</u> <u>III</u>	<u>IV</u> III	150	
		<u>I</u> II, IV	<u>I</u> IV	<u>I</u> III, IV	<u>I</u> —	<u>IV</u> III	<u>IV</u> <u>III</u> (m)	<u>II, III, IV</u> (m)	<u>II</u> III, IV	<u>II</u> III	135	
		<u>I</u> II	<u>I</u> II	<u>I</u> II	<u>II</u> —	<u>I</u> II, IV	<u>II, III, IV</u> (m)	<u>II, III</u> —	<u>I</u> II	<u>I</u> II, III	120	
		<u>II</u> I, III	<u>II</u> III	<u>I</u> II	<u>I</u> <u>II</u>	<u>I</u> II	<u>I</u> II	<u>I</u> III	<u>I</u> II	<u>II</u> I	105	
90		<u>I</u> <u>II</u>	<u>III, IV</u>	<u>IV</u> II, III	<u>—</u> (m)	<u>II</u> <u>III</u> (m)	<u>I, II</u>	<u>I</u> II	<u>I</u> II	<u>I</u> II	90	
		<u>I, II</u>	<u>II, III</u>	<u>III</u> <u>II</u>	<u>II</u> <u>III</u> (m)	<u>I, II</u> (m)	<u>I</u> <u>II</u>	<u>II</u> I	<u>II</u> I	<u>II</u> I	75	
		<u>I</u> II	<u>I</u> II, III	<u>II, III</u>	<u>IV</u> <u>II, III</u> (m)	<u>I</u> <u>II, III</u> (m)	<u>I, II</u>	<u>I</u> <u>II</u>	<u>I</u> <u>II</u>	<u>I</u> II	60	
		<u>II, III</u>	<u>II, III</u>	<u>II</u> <u>III, IV</u> (m)	<u>I</u> <u>III, IV</u> (m)	<u>I</u> <u>II, III</u>	<u>I*</u> <u>II*</u>	<u>I</u> <u>II, III</u>	<u>I</u> II, <u>III</u>	<u>I</u> <u>III</u>	45	
		<u>I</u> III, IV	<u>IV</u> II, III	<u>IV</u> <u>III</u> (m)	<u>I</u> <u>III</u>	<u>III</u> <u>II, IV</u>	<u>III*</u> <u>IV*</u> (m)*	<u>IV</u> <u>II, III</u> (m)	<u>III, IV</u>	<u>II, III</u>	30	
		<u>I, III</u>	<u>I, IV</u>	<u>III, IV</u> (m)	<u>I</u> <u>IV</u> (m)	<u>I</u> —	<u>I</u> II, IV	<u>I</u> III, IV	<u>I, IV</u>	<u>III, IV</u>	15	
		<u>III, IV</u>	<u>IV</u> III	<u>IV</u> <u>III</u> (m)	<u>IV</u> I, III (m)	<u>IV</u> I	<u>IV</u> II, <u>III</u> (m)	<u>IV</u> <u>III</u>	<u>IV</u> <u>II</u>	<u>IV</u> III	0	
		-18	14	10	6	-2	0	+2	6	10	14	+18

Il résulte en premier lieu de cette Table II, que la distribution des chiffres de prépondérance pour le groupe I et pour le groupe IV dans la Voie lactée boréale est à peu près complémentaire.

Fig. 1.

Prépondérance du groupe I, comparée à la distribution de la lumière galactique.

(Les chiffres I indiquent les rectangles où le I^r groupe a la prépondérance; les régions où la densité de la V. L. est au moins = 1 sont comprises entre des lignes pointillées)



En considérant les 84 rectangles de la zone galactique proprement dite (omission faite des bandes extrêmes), nous n'en trouvons que 15, où I ou IV n'atteignent pas la plus haute valeur entre les densités. Des 69 cas où ces groupes ont le maximum, 14 peuvent être regardés comme douteux; des autres, 33 appartiennent à I, 22 à IV. Les prépondérances de II et III sont ainsi beaucoup moins nombreuses. Puis, nous voyons cette particularité remarquable que I occupe la région en dehors de la ligne où l'intensité de la lueur galactique est 1.0; au moins, la prépondérance de I ne se rencontre nulle part dans la région maximale de la Voie lactée — à une exception près. (Fig. 1).

L'explication de cette particularité n'est pas difficile à trouver, elle donne aussi la raison du grand nombre de cas où le groupe I exerce la prépondérance. Le caractère de la distribution des étoiles du I^r groupe s'écarte le plus de celui des autres groupes, dont la distribution, de II à IV, correspond de plus en plus aux détails de la Voie lactée; les étoiles de I se condensent, en général, beaucoup moins vers la région maximale; par conséquent, les moyennes de ce groupe ont la prépondérance dans les régions où la lumière galactique (éventuellement le groupe IV) est faible.

L'exception que l'on remarque vers α Cygni est d'autant plus remarquable que tous les groupes d'étoiles plus faibles, de même que la Voie lactée, atteignent le maximum de leur densité dans cette partie de la zone. Ainsi, tandis que la courbe de la densité pour les autres groupes monte assez régulièrement vers le maximum, le I^r groupe s'étend dans une couche beaucoup plus plate, sa courbe est beaucoup moins inclinée, mais s'élève brusquement dans la région de condensation extrême, où elle surpasse toutes les autres (Voy. pg. 63).

§ 13. — Ici se place la question de la corrélation générale entre l'éclat de la Voie lactée et la distribution des étoiles de la *Bonner Durchmusterung*. SEELIGER a cru établir (*Betrachtungen Verteil. d. Fixsterne*, 1898, p. 58, 62) qu'une corrélation pareille à celle que j'avais trouvée (*A. N.* 3270, *Verslagen K. Akad. v. Wet.* 1894/95 p. 183) pour deux régions peu étendues de la zone galactique, dans Aquila et dans Cygnus, entre la distribution de la lumière galactique et celle des étoiles 9.1 — 9.5 ARG., ne se manifeste pas dans la Voie lactée prise en général. De ce qui précède, il résulte cependant que, pour les divisions de la zone et les groupes stellaires adoptés ici, une telle corrélation dans les traits généraux se manifeste dès le II^d groupe (6,6 — 8,0 ARG.). Le résultat

négalif auquel arrive SEELIGER, même pour les étoiles les plus faibles d'ARGELANDER s'explique, à ce qu'il me paraît, en partie par l'usage des cartes galactiques trop incomplètes d'HOUEAU, mais surtout par cette circonstance que les jauges d'HERSCHEL, dont SEELIGER déduit la distribution des étoiles très faibles, ont été effectuées de préférence dans les endroits très riches ou très pauvres de la Voie lactée, (Comp. *Publ. Washburn*, II) de sorte que les valeurs trouvées pour la densité des étoiles faibles dans ces endroits ne seront pas valables, très souvent, pour les régions environnantes, beaucoup plus étendues, dans lesquelles SEELIGER a compté les étoiles d'ARGELANDER (Voy. SEELIGER, *Betracht.*, *ibid.*). Il est vrai que SEELIGER prend aussi en considération l'hémisphère austral, et il est possible que le parallélisme trouvé pour l'autre hémisphère s'efface si l'on étudie la zone galactique entière. Mais la représentation de la Voie lactée, donnée par HOUEAU, est très incomplète pour l'hémisphère austral, et si mes résultats pour la zone boréale sont exacts, il est très probable que la grandeur stellaire à laquelle la corrélation se manifesterait dans la zone australe ne serait pas bien au-dessous des faibles étoiles d'ARGELANDER.

Cependant, la question générale, ainsi posée, me paraît seulement de quelque importance pour ma première conclusion (Voy. § 21). Car si l'on part de la supposition — aujourd'hui indiscutable — que dans toutes les régions de l'espace céleste les grandes et les petites étoiles sont entremêlées, et si l'on admet que la structure du système galactique n'est pas trop compliquée (Voy. § 21), il est évident qu'une pareille corrélation se manifestera toujours, pour des étendues assez vastes et des groupes stellaires assez nombreuses: les fortes condensations produiront un excès d'étoiles de toutes les grandeurs. Au contraire, quand on considère des surfaces restreintes et des groupes peu nombreuses, les irrégularités purement locales détruiront toute corrélation générale qui pourrait exister.

Mais il est très important — ainsi qu'il paraîtra dans la suite de cette étude — de savoir quelles sont les parties du ciel où se manifeste une telle corrélation, et entre quelles groupes d'étoiles, et d'autre part, dans quelles régions la condensation des étoiles, considérées par groupes, ne présente aucune espèce de régularité.

§ 14. — *Distribution par rapport à la latitude et à la longitude galactiques.*

En combinant les rectangles en longitude gal., de façon que les parallèles de -6° et $+6^{\circ}$ lat. gal. forment les limites de la bande centrale, on obtient pour la zone entre -14° et $+14^{\circ}$ le résultat suivant:

Tableau IV.

Condensation vers l'équateur galactique.

— 14	— 6	+ 6	+ 14	
180				180
I 0.9	I 1.0	I 1.0		
II 0.9	II 1.0	II 1.0		
III 0.9	III 1.0	III 0.9		
IV 0.9	IV 1.0	IV 0.9		
(G. 0.8)	(G. 1.2)	(G. 0.9)		
0				0
— 14	— 6	+ 6	+ 14	

En comparant les deux moitiés de la zone boréale, de 180° à 90° long. gal. et de 90° à 0° long. gal., on trouve:

Tableau V.

Distribution en longitude galactique.

180						180
	I	II	III	IV	G	
	0.9	0.8	0.9	0.9	0.8	
90						90
	I	II	III	IV	G	
	1.1	1.1	1.0	1.0	1.2	
0						0

Ces deux tableaux (IV et V) montrent clairement combien fut erronée la représentation classique de la Voie lactée comme une couche stellaire condensée assez graduellement vers l'équateur galactique, mais distribuée à peu près uniformément en longitude galactique. Dans la partie boréale de la zone, l'influence du maximum dans Cygnus sur la condensation des étoiles n'est pas inférieure à la condensation générale vers l'équateur galactique.

§ 15. — Des cinq groupes, c'est G, celui où prédominent les étoiles très faibles de la Voie lactée, qui se condense le plus vers le plan galactique; il peut être intéressant d'étudier ce phénomène de plus près. Pour cela, nous groupons les rectangles d'une manière différente: dans 6 sections, par ordre décroissant de l'intensité de

la lueur galactique (Comp. pg. 33 ci-après). Dans le VI^e tableau, la colonne A indique ces sections, B le nombre des rectangles comprises dans chaque division, C la moyenne de l'intensité de la lueur galactique pour chaque section, D la moyenne de la latitude galactique des rectangles dans chaque division.

Tableau VI.

Distribution de la lueur galactique.

A Sect.	B Nomb.	C G	D Lat. gal.
1	13	1.77	4°3
2	14	1.36	4°3
3	14	1.15	7°4
4	14	0.92	7°4
5	14	0.73	8°3
6	15	0.40	9°1

Les parties brillantes de la Voie lactée sont ainsi, en général, situées près de l'équateur galactique, et elles se condensent assez régulièrement vers ce plan.

Mais une inspection superficielle des cartes de la Voie lactée nous apprend déjà, que la condensation des étoiles de la Voie lactée vers l'équateur galactique est loin d'être régulière ou uniforme dans toutes les parties de la zone, et il résulte du tableau VI que les 13 régions les plus brillantes (Section 1) de la Voie lactée ne se trouvent pas plus près de l'équateur, en moyenne, que les 14 régions d'un éclat moindre (Section 2).

On peut se demander toutefois, si ce phénomène ne disparaîtrait pas avec l'application d'une correction dans la position de l'équateur galactique admise ici. En effet, suivant HOUZEAU et RISTENPART („*Untersuchungen*“, *Veröffentl. Karlsruhe*, IV), le pôle nord gal. serait dans $\alpha : 191^{\circ}9.5$, $\delta : 29^{\circ}19'$ (1880.0); GOULD trouve (1875.0); $190^{\circ}20'$; $27^{\circ}21'$. Le point zéro, origine des longitudes galactiques sur la carte de MARTIN, se déplace d'environ deux degrés vers le côté d'Aquila, en adoptant la moyenne de ces positions. On remarque alors une condensation beaucoup plus forte de la lueur

galactique vers l'équateur, mais seulement si l'on fait exception des rectangles entre 30° et 75° long. gal. qui ont une latitude boréale gal., et de ceux entre 60° et 100° qui ont une latitude australe. Ce sont là des exceptions trop importantes pour que la position nouvelle adoptée pour le pôle gal. ait une grande signification ici; il n'en est pas moins vrai que la région pour laquelle il a été fait exception ici, et qui coupe obliquement l'équateur galactique, paraît se trouver dans une situation particulière (Comp. tableau III). D'autre part nous savons que la zone („Belt") d'étoiles brillantes décrite par JOHN HERSCHEL, croise l'équateur galactique dans une longitude plus élevée et sous un angle plus grand, et que CELORIA (*Pubbl. Brera* XIII, p. 18) a remarqué un phénomène analogue pour l'ensemble des étoiles faibles et des étoiles brillantes. On n'a pas le droit d'attribuer ces particularités à une cause unique — en effet, le „Belt" et la „région exceptionnelle de la Voie lactée" paraissent plutôt complémentaires, jusqu'à un certain degré (Voy. *Astr. Jour.* XII, 2) — mais il est bien évident que pour les groupes stellaires d'un éclat moyen différent, les plans de plus grande condensation ne coïncident nullement; par conséquent, la position du pôle galactique dépend de la grandeur stellaire moyenne du groupe stellaire qu'on prend en considération.

§ 16. — *Modification du caractère de la distribution avec le décroissement de la grandeur stellaire.*

On peut dire que, prise en général, la modification du caractère de la distribution, à mesure que l'on considère des groupes d'étoiles d'un éclat moyen de plus en plus faible, se traduit de deux façons. C'est comme si un mouvement rotatoire — autour d'un point situé à peu près au centre de la zone galactique boréale — se produirait dans toute la zone stellaire, mouvement dirigé d'Hercules à Aquila, et d'Orion à Monoceros; d'autre part, on remarque un déplacement graduel de la région condensée dans la direction du zéro de longitude galactique.

Une comparaison des dessins de la *Planche I* nous montre les particularités suivantes. La région condensée secondaire, qui est située dans Orion et Taurus pour le groupe I (principalement en dehors de la zone galactique proprement dite) oscille autour de l'équateur jusqu'au groupe III; à partir de ce groupe, sa forme et sa position restent à peu près constantes, excepté que la région se rétrécit pour ainsi dire le long de l'équateur galactique. Dans la région maximale principale, autour de Cygnus, la région de grande densité, qui d'abord s'étend bien loin dans l'hémisphère boréal (Voy.

STRATONOFF), s'approche graduellement de l'équateur galactique, pour se condenser à la fin dans les deux branches bien connues de la Voie lactée. Il est à remarquer que la branche boréale, faible, (vers Ophiuchus) se forme le premier ¹⁾: pour le groupe IV ou rencontre ici des densités élevées, ce n'est que plus tard que paraît la branche brillante de la Voie lactée, qui passe près d'Altair. De même, c'est seulement dans les étoiles très faibles que se montre le rameau brillant de la Voie lactée, qui part de Cygnus, passe entre Lacerta et Cepheus, et s'étend jusque au-delà de Cassiopeia; mais même pour les étoiles les plus faibles les courants lumineux ne s'étendent par plus loin: le „vide de Persée” se creuse même plus profondément. Par contre, vers l'autre bout de la zone, la densité devient plus forte à mesure que la grandeur diminue, il en résulte les accumulations immenses d'étoiles faibles dans Aquila et Scutum, où les étoiles brillantes sont assez rares. (Voy. *A. N.* 3270).

Il est à noter encore que dans la région maximale secondaire — dans Auriga et Monoceros — la répartition des densités pour les groupes faibles de la *B. D.* est assez uniforme, la Voie lactée elle-même y est relativement vague et d'un éclat peu varié; aussi avons nous déjà fait remarquer que dans cette partie de la zone il se trouve peu d'étoiles brillantes. Il n'en est pas ainsi de la région condensée principale — entre Cassiopeia et Aquila — là, des densités faibles alternent rapidement avec des densités élevées; mais un examen plus minutieux nous apprend que la distribution des étoiles n'y est pourtant pas tout-à-fait irrégulière et accidentelle.

On peut diviser cette partie de la zone, celle où se manifeste la Grande Condensation, entre 0° et 105° de long. gal., — 14° et $+14^\circ$ de lat. gal., de la manière suivante. Soit A la bande située entre long. gal. 105° et 75° , (V. le tableau III, p. 22) D celle entre 0° et 30° ; B les 7 rectangles entre 60° et 75° avec les 3 rectangles boréales (à droite) de la bande 45° à 60° ; et C les 7 rectangles entre 30° et 45° , avec 4 rectangles de la bande 45° à 60° , comptées du sud au nord. Alors le tableau II montre que:

dans A le *second* groupe a la prépondérance dans 7 rectangles des 14 qui s'y trouvent, en outre, ce groupe occupe le deuxième rang dans 5 autres rectangles; dans B c'est le *premier* groupe qui exerce la prépondérance absolue dans 8 rectangles sur 10; dans C le *troisième* groupe a la prépondérance dans 3 rectangles, mais

¹⁾ La région galactique autour de Scorpius, etc. n'est pas la continuation de cette branche, elle se rattache plutôt à la branche principale dans Sagittarius (Voy. surtout les photographies de BARNARD).

il vient en second lieu dans tous les autres 8 rectangles de la subdivision; dans D le *quatrième* groupe occupe le premier rang dans 10 rectangles sur 14, et le second dans 3 autres.

§ 17. Cette répartition des densités peut être attribuée en partie à l'influence de la „région exceptionnelle” (*ante*, p. 28) qui, vers Cepheus, s'étend sur une partie de la zone où il y a peu de lueur galactique, et qui a, en général, une densité élevée pour les étoiles d'ARGELANDER. Mais la cause de la particularité que je viens d'indiquer ne peut pas être simplement celle-ci, qu'une région fortement condensée se projette obliquement de Lyra à Lacerta, sur la bande médiane de la Voie lactée; car si l'on suit le cours des *maxima* pour les groupes I et II, on s'aperçoit qu'elles partent des environs d' α Cygni, et se dirigent vers le nord-ouest (Voy. le tableau II) à travers la partie boréale de la zone — où les étoiles plus faibles de la Voie lactée sont relativement peu condensées — pour revenir à l'équateur galactique dans Cassiopeia.

Si l'on met à part une région de condensation extrême dans Cygnus — comprise entre les traits forts du tableau III — il est même possible de diviser le reste de telle façon que, dans chacune des 4 divisions, tous les rectangles, à l'exception d'un seul, appartiennent à l'une des 4 groupes stellaires, qui y exerce la prépondérance ou dont la densité vient tout au moins en second lieu. La région de condensation extrême, dont je viens de parler, correspond assez bien à la „région exceptionnelle”, précédemment indiquée. Tous les 5 groupes y atteignent le maximum de leur densité, et dans toutes les parties de cette région, la densité d'un des groupes extrêmes, soit du groupe I, soit de la Voie lactée, atteint au moins la valeur 1.70. ¹⁾

De ce qui précède on peut inférer, je crois, que dans la „Grande Condensation”, autour d'une région centrale, où la densité

¹⁾ Quant aux divisions indiquées; celle où le groupe I a la prépondérance occupe tous les rectangles situés au nord de la région centrale, en outre les 5 rectangles boréales de la bande 15° à 30° long. gal. (11 rectangles); celle du groupe II les 4 rectangles boréales de la bande 90° à 105° , les 5 boréales de la bande 75° à 90° et le rectangle $60 + 75$, — $10 - 6$ (10 rectangles); celle du groupe IV toute la bande entre 0° et 5° long. gal., les 2 rectangles australes de la bande 15 à 30 et les 2 australes de la bande 30 à 45 (11 rectangles), enfin celle du groupe III tous les autres (11). On n'a pris en considération ici que les 49 rectangles entre 0° et 105° long. gal., — 14° et $+14^\circ$ lat. gal. — la région de la Grande Condensation — mais les bandes extérieures montrent le même caractère que les divisions avoisinantes. Le tableau II indique du reste, que presque dans tous les rectangles limitrophes la densité du groupe qui prédomine dans la division adjacente est élevée.

est extrême pour tous les groupes stellaires, les „prépondérances” (chiffre du groupe qui a, dans un rectangle, une densité plus élevée que les autres) ne sont pas distribuées au hasard, ni concentriquement, mais que le caractère de la distribution stellaire s’y modifie, avec le décroissement de la grandeur, de la manière suivante :

En partant du maximum absolu du groupe I, la zone de la plus grande condensation de ce groupe s’étend vers le nord et le nord-ouest. Quand on procède dans la même direction, on trouve d’abord une région où, relativement, les étoiles du II^d groupe sont le plus nombreuses; puis, en suivant la région maximale principale au sud de l’équateur galactique, on voit paraître la région où le III^e groupe a la prépondérance, et de cette région on passe, en se rapprochant de 0° long. gal., dans le domaine du IV^e groupe. Nous savons du reste que dans cette partie du ciel, au sud de l’équateur galactique, paraît la branche brillante de la Voie lactée, qui, à mesure qu’elle s’avance dans l’hémisphère austral, devient encore plus éclatante. (Voy. ma *Voie lactée dans l’hémisphère boréal*, Pl. I; et l’*Uranometria Argentina* de GOULD.)

Nous pouvons aussi décrire le phénomène de la manière suivante

Dans la région maximale la plus importante de la Voie lactée boréale (Cassiopeia—Aquila) le mouvement qui, à mesure que la grandeur stellaire diminue, paraît déplacer la masse des étoiles vers 0° long. gal., est précédé d’un mouvement en sens inverse pour les étoiles des deux groupes les plus brillantes, surtout au nord de l’équateur galactique. ¹⁾

§ 18. — *Relation entre les densités d’un même rectangle.*

Un petit nombre de rectangles est tout-à-fait irrégulièrement composé. Dans un certain nombre, on voit les densités décroître ou s’accroître plus ou moins régulièrement vers les groupes moyennes, mais dans la plupart il se manifeste un accroissement ou décroissement plus ou moins graduel du groupe le plus lumineux au groupe le plus faible.

Indiquons par A un rectangle dans lequel la densité décroît graduellement du groupe I au groupe IV (A? = le rectangle où le décroissement est *à peu près* graduel); B celui où la densité s’accroît graduellement de I à IV (B? = presque graduellement),

¹⁾ Pour les étoiles classées par demi-grandeurs, les maxima se trouvent éparpillés mais les principaux ont la tendance que je viens d’indiquer; Voy. RISTENPART, *Veröffentlichungen Sternw. Karlsruhe* 1892.

le tableau II, pg. 18, montre que sur 108 rectangles il se trouve: 17 A, 19 A?, 8 B et 17 B?. En étudiant la distribution de ces types dans le tableau VII qui va suivre, on voit que la limite entre les deux types correspond rudement à la ligne qui marque la moyenne de la lueur galactique, de telle sorte (ce qui était à prévoir) que le type A se rencontre presque exclusivement là où la Voie lactée est peu condensée, B dans les régions de forte condensation. En effet, la densité moyenne des groupes I et G est, dans les rectangles où la distribution présente un type régulier, pour A: 1.16 (I) et 0.47 (G), pour B 0.79 (I), 1.51 (G) — Pour les B?, types douteux, on trouve les valeurs peu différentes 0.93 et 1.36.

Tableau VII.

Types de la distribution dans les rectangles.

(Les traits entourent la région où l'intensité de la Voie lactée est au moins égale à 1.0)

—18										+18	
180	A?	—	—	—	—	B	B?	—	—	180	
	—	—	—	—	B	B?	—	B?	B?		
	A?	—	—	—	—	B	B?	—	—		
	A	A	A	—	—	B	—	A	A		
	A?	A?	—	—	A	A?	—	A	A?		
	A	—	—	B?	—	A	A	A	A		
90	A?	A?	—	—	—	A	A?	A?	A?	90	
	A?	A	—	B	—	A?	A?	A?	A		
	—	—	—	B?	A?	A	A?	—	A?		
	—	B?	B?	A?	—	B?	B	—	—		
	—	B?	B?	B?	A	—	B?	—	—		
	—	B?	B	B?	—	B	B?	—	—		
0°	—18									+18	0°

L'exception dans Cygnus, remarquée déjà plus d'une fois au cours de cette étude, se manifeste aussi dans la distribution de ces types.

§ 19. — Il nous reste d'élucider la question quels rapports peuvent exister entre la manière dont la densité change d'un groupe à l'autre. Pour cela j'ai arrangé les 84 rectangles (entre — 14°

et $+ 14^{\circ}$ lat. gal.) suivant l'intensité décroissante de la lueur lactée, puis je les ai groupés en six sections A—F, chaque section comptant à peu près le même nombre de rectangles; ensuite la moyenne fut calculée pour chaque section, non seulement celle de la lueur galactique (G), mais aussi celles des densités des quatre groupes de la *B. D.*

Tableau VIII.

Densités, rangées selon la lueur galactique décroissante.

Section	G	IV	III	II	I	Nombre des Rectangles.
A	1.77	1.24	1.22	1.21	1.20	13
B	1.36	1.20	1.18	1.09	1.03	14
C	1.15	1.05	1.01	0.96	1.09	14
D	0.92	1.03	1.02	1.00	1.10	14
E	0.73	0.89	0.91	0.97	0.94	14
F	0.40	0.62	0.66	0.71	0.89	15

Ainsi qu'on voit, les valeurs pour la densité tendent à s'égaliser vers la valeur 1.0 de G, et, en conformité avec ce que nous venons de trouver, le type B correspond à peu près aux deux rangs supérieurs, le type A aux deux rangs inférieurs du tableau.

Mais de ce tableau VIII il s'ensuit encore, que pour tous les quatre groupes stellaires la densité s'accroît en même temps que l'intensité de la lueur galactique, et sinon pas régulièrement d'autant plus fortement que le groupe est plus proche de G, c'est-à-dire, consiste d'étoiles plus faibles.

Le quotient A : F a les valeurs suivantes :

A	G	IV	III	II	I
$\frac{A}{F}$:	4.42	2.0	1.85	1.70	1.35

Bien que les valeurs ne soient pas directement comparables, je donne encore le quotient G : I

G	A	B	C	D	E	F
$\frac{G}{I}$:	1.47	1.32	1.06	0.84	0.78	0.45

Incidemment, la régularité que nous observons ici paraît donner une certaine garantie que l'image galactique qui sert de base à cette étude, n'est pas trop inexacte, dans ses grands traits. Toutefois, les défauts de la méthode suivant laquelle le tableau II a été formé, doivent se faire sentir surtout dans le tableau VIII. Car les évaluations d'ARGELANDER, non corrigées, donnent selon toute probabilité des valeurs trop faibles pour la densité des étoiles de la *B. D.* dans les régions où la Voie lactée est très condensée. Ce sont surtout les valeurs de la partie supérieure de la col. IV, Tabl. VIII qui en auront souffert. La différence entre la grandeur visuelle et la grandeur photographique des étoiles exerce son influence dans le même sens (*ante* pg. 12). On peut faire remarquer cependant, que les erreurs d'estimation d'ARGELANDER — qui eussent été en tout cas bien difficiles à corriger, pour des régions si peu étendues — ne se font sentir ici qu'aux limites de groupes très nombreuses, et que l'erreur qui en résulte ne peut être assez considérable que vers la grandeur 9.0. (Voy. KAPTEYN, *Verslagen Kon. Akad. van Wet.* 1900/1901 pg. 716).

III.

§ 20. — En tachant d'interpréter les résultats des recherches présentes, je veux prendre comme points de départ deux faits seulement, que les travaux antérieurs ont mis hors de doute, savoir:

1°. Entre l'éclat réel des étoiles, il existe des différences considérables.

2°. Les étoiles sont très inégalement condensées dans les diverses parties du système stellaire.

Je ne veux faire a priori aucune supposition quant à la distance des agglomérations stellaires.

(Tout ce que nous savons, par la détermination des parallaxes, sur la distance des étoiles, indique des différences énormes dans leur éclat réel. Les recherches du prof. J.-C. KAPTEYN, basées pour la plus grande partie sur la distribution des mouvements propres des étoiles, portent à la même conclusion.

Je ne suppose pas, du reste, que la proportion entre le nombre des étoiles des diverses grandeurs soit la même, dans toutes les parties du système stellaire.

L'inégalité de l'éclat réel des étoiles résulte encore indirectement

des recherches faites depuis 30 ou 40 ans sur la distribution des étoiles dans l'espace.

La réalité du „clustering” est devenue tellement évidente, depuis l'époque où WILLIAM HERSCHEL abandonna sa première hypothèse, que je puis me borner à rappeler les recherches de SEELIGER (*Sitzungsber. München*, 1898); l'existence des milliers d'amas stellaires, surtout dans la Voie lactée, l'évidence fournie par les photographies de la Voie lactée).

§ 21. — La corrélation générale qui se manifeste dans le Tableau VIII ne peut nous mener qu'à cette conclusion vague: que les accumulations de la Voie lactée ont assez de cohérence; qu'elles ne sont pas éparpillées dans l'espace, et ne pénètrent guère dans le voisinage du Soleil.

La réponse à la question si, pour des ordres d'éclat et des parties du ciel déterminés, il se manifestera une corrélation, un parallélisme évident dans la distribution des étoiles de grandeurs diverses, dépend uniquement du nombre plus ou moins considérable des étoiles et de l'étendue plus ou moins grande des superficies que l'on compare.

Il sera toujours possible de choisir les conditions de telle sorte qu'une certaine corrélation se produise; d'autre part toute corrélation s'effacera quand on continue à restreindre les limites des ordres d'éclat et des surfaces; cela tient aux deux faits caractéristiques de la distribution et de l'éclat des étoiles énoncés § 20. Ainsi, il y a un phénomène de corrélation avec lequel tout le monde est familier: un hémisphère céleste, divisé en deux moitiés dont l'une contient la Voie lactée, montre un excès de toutes les grandeurs dans la moitié où la Voie lactée se trouve; par contre nous savons qu'il existe dans la zone galactique beaucoup d'endroits riches en étoiles faibles, où l'on ne trouve que très peu d'étoiles brillantes: ici les surfaces comparées ont trop peu d'étendue pour montrer le parallélisme.

Si toutes les condensations de la Voie lactée étaient situées à la même distance de nous (Système annulaire, centre occupé par le Soleil), on verrait une corrélation presque parfaite. Car dans les régions très condensées il doit se trouver, selon toute probabilité, non seulement un nombre excessif d'étoiles réellement faibles, mais encore un excès d'étoiles réellement éclatantes (V. pg. 34, § 20, 1°). On n'a pas le droit de supposer, à priori, que pour des régions étendues, les grandeurs intermédiaires manquent.

Nous venons de poser ici un cas extrême. Une autre supposition extrême serait celle-ci: que les agglomérations stellaires se trouvent

aux distances les plus différentes de nous, dans les directions diverses, ce qui produirait une corrélation minime (A moins qu'il ne s'agisse d'agglomérations extrêmement petites par rapport à leurs distances respectives, car alors un nivellement se produirait : toutes les parties de la Voie lactée nous présenteraient à peu près le même éclat, pourvu que le nombre des étoiles fût assez considérable ; il ne pourrait plus être question de parallélisme). En effet, des accumulations situées à des distances extrêmes, beaucoup plus grandes que la moyenne, dans un certain rayon visuel, n'ajouteront que des étoiles des classes faibles à celles que le télescope y aura déjà montrées, à moins de supposer que ces accumulations soient d'une grandeur énorme, pour compenser ainsi, par le grand nombre d'étoiles d'un très grand éclat absolu, la distance excessive. Il en est de même des agglomérations situées (relativement) tout près du Soleil qui — à moins d'être très petites — en fournissant un nombre exceptionnel d'étoiles brillantes, détruiraient, sur des superficies considérables, presque complètement toute corrélation résultant de la disposition des groupes plus éloignés. Ainsi, le parallélisme sera d'autant plus prononcé que la grande masse des étoiles s'écarte moins d'une certaine limite de distance, supérieure et inférieure.

Or nous avons vu (Tableau VIII) que dans notre système stellaire le parallélisme va assez loin. Dans un travail antérieur (*Verslagen Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, afd. Natuurk.*, 1894/95; *A. N.* 3270) j'ai pu montrer que, au moins pour la dernière classe d'ARGELANDER, cette corrélation se manifeste dans une partie de la Voie lactée déjà même lorsqu'on compare entre elles des surfaces ne mesurant qu'environ 10 degrés carrés. Mais c'est là peut-être un cas exceptionnel, qui a peu de signification pour une recherche systématique s'étendant sur toute la Voie lactée boréale. Il n'en reste pas moins la corrélation générale très prononcée trouvée ici pour des surfaces qui n'occupent que la $\frac{1}{216}$ partie de la zone galactique entière, et pour des ordres d'éclat qui embrassent seulement une fraction des étoiles de la *B. D.* et dont le moins nombreux (groupe I) ne compte pas la 3000^e partie de l'ensemble des étoiles observables dans la Voie lactée boréale.

Quand même cette corrélation serait moins remarquable, ou ne se manifesterait qu'à une grandeur plus faible que la dernière classe d'ARGELANDER, dès que l'hémisphère austral fut prise en considération (Voy. pg. 25), il n'en resterait pas moins que, entre les deux suppositions extrêmes que nous venons d'énoncer, la structure du système stellaire doit s'approcher beaucoup plus de la première que

de la seconde. C'est-à-dire qu'il doit y avoir assez de cohérence entre ses parties condensées, et que, dans les limites de l'observation, la courbe qui représente les densités des parties de l'espace (Raum-Elemente, Elements of space) échelonnées sur un même rayon visuel, ne peut présenter un grand nombre d'oscillations importantes.

§ 22. En général, les condensations de la lumière galactique paraissent correspondre à de véritables accumulations stellaires; on peut regarder les zones galactiques comme des couches d'étoiles plus ou moins irrégulièrement condensées, et la structure apparente de la Voie lactée s'explique assez bien par cette seule supposition.

Il y a quelquefois des indices d'une superposition apparente des couches et accumulations stellaires (Comp. pg. 42 ci-après) et il est probable que, dans quelques endroits, nous voyons des courants stellaires plus ou moins en raccourci — par exemple vers α et π Cygni, et dans Cassiopeia, Sagittarius, etc. (*Astrophys. Journ.* XII, 2. p. 156) mais la plus grande partie de la Voie lactée paraît composée de couches stellaires relativement peu profondes. Certaines ouvertures très caractéristiques de la Voie lactée (la photographie céleste en a encore, dans ces temps derniers, fait connaître un grand nombre) avaient déjà conduit Sir JOHN HERSCHEL à admettre le peu de profondeur de plusieurs régions galactiques, et cet argument, quelque peu modifié, me paraît toujours valable. Le prof. SEELIGER ayant cru pouvoir le réfuter dernièrement (*Astrophys. Journ.* XII, 5, p. 379) je veux dire ici quelques mots sur cette question, qui a son importance.

Ainsi que l'indique SEELIGER, la probabilité d'espaces vides *entre les étoiles*, perpendiculairement au rayon visuel, est indépendante du plus ou moins d'étendue, dans le sens du rayon visuel, de l'espace où un nombre constant d'étoiles est distribué. Seulement SEELIGER n'a pas le droit d'appliquer ce raisonnement général à ce cas particulier des conditions auxquelles est liée la formation de la lumière galactique.

Les étoiles qui contribuent le plus à la formation de la lueur galactique doivent se trouver à des distances moyennes du Soleil. Il est vrai qu'une étoile excessivement brillante, très éloignée de nous; de même qu'une étoile assez proche, mais peu lumineuse, pourront aider à la formation de cette lueur, mais ce sont là des exceptions. En général, les étoiles situées à une distance extrême ne comptent plus, ou presque plus, tandis que les étoiles au-dessus

d'une grandeur moyenne dans le voisinage du Soleil, se voient séparément. Ainsi, pour que l'illusion optique, qu'est au fond le phénomène galactique, puisse se produire dans une certaine direction, il faut que dans cette direction la grande masse des étoiles se trouve à une distance moyenne. Figurons-nous les étoiles d'une portion de la Voie lactée transportées à dix, cent fois leurs distances, le ciel nous paraîtra noir dans cet endroit; transportées dans le voisinage immédiat du Soleil, ces mêmes étoiles seront visibles individuellement, mais sans fond lumineux. Un certain nombre d'étoiles produira une lueur galactique à la condition, 1° qu'elles paraissent se toucher, c'est-à-dire que les distances angulaires qui les séparent, vues du Soleil, soient excessivement petites; 2° que, dans le sens du rayon visuel, leurs distances du Soleil soient comprises entre de certaines limites, déterminées par leur éclat. De cela il s'ensuit déjà que, pour ce qui est de la formation de la lueur galactique, les distances des étoiles, dans le sens du rayon visuel, exercent une grande influence.

Personne ne doute plus, aujourd'hui, que dans la direction où nous voyons la Voie lactée les étoiles sont très irrégulièrement condensées. S'il y a assez d'étoiles, d'une certaine grandeur moyenne, dans une portion déterminée P d'une partie de l'espace A, nous apercevons de la lueur galactique dans la direction de P, n'existerait-il aucune autre agglomération stellaire dans cette direction. Dans l'espace A (supposée très profonde, dans le sens des rayons visuels) que nous avons en vue, nous devons nous représenter qu'il existe un nombre considérable de régions d'une densité stellaire au moins égale à celle de P., distribuées accidentellement. Pour juger de la densité apparente de la Voie lactée sur une partie de la voûte céleste, nous devons alors additionner l'éclat de tous les P, P₁, P₂ etc. qui se trouvent dans un même cône visuel, et il est évident que les agglomérations d'une densité extrêmement forte ou extrêmement faible se neutraliseront d'autant plus que, (en moyenne pour tous les rayons visuels qui traversent cette région de l'espace) le nombre des agglomérations, situées sur un même rayon visuel, est plus grand; c'est le *nivellement* des irrégularités dans la Voie lactée qui en dépend. Si ces agglomérations P, P₁, P₂ etc. sont très nombreuses dans toute cette partie de l'espace, la probabilité est très petite qu'une „ouverture” se produise entre des régions brillantes.

SEELIGER reconnaît que „la probabilité d'endroits sombres au milieu des accumulations de la Voie lactée est très petite (*ibid.* p. 379), mais, dit-il, en tout cas la probabilité demeure tout aussi exigüe si

nous comprimons le même nombre d'étoiles dans une espace plus petite, pourvu qu'elle couvre la même portion du ciel."

A cela, il y a à répondre que nous n'avons pas en vue une possibilité théorique, mais un cas naturel. Figurons-nous le même nombre d'étoiles, de la même grandeur moyenne, mais situées dans une couche stellaire B, d'une épaisseur qui n'est que la moitié de celle de l'espace A. Alors, il n'y a aucune raison pour admettre — il est même extrêmement improbable — que la *grandeur* des accumulations Q , Q_1 , Q_2 etc., qui se sont formées dans B, ait diminué, par rapport à P , P_1 , P_2 etc., dans la même proportion de B à A. Proportionnellement, la force condensatrice plus grande dans B aura réuni autour de chaque centre un nombre plus grand d'étoiles, par conséquent, le *nombre* de ces centres, de ces accumulations, aura diminué; la chance d'un nivellement aura diminuée, celle d'une disposition apparente très irrégulière des taches galactiques sera plus grande.

Nous supposons ici que la matière distribuée dans l'espace est très peu dense („bei der überaus dünnen räumlichen Vertheilung der kosmischen Massen . . .” SEELIGER, *Betrachtungen* pg. 64) qu'ainsi la dimension des agglomérations est en moyenne très petite relativement aux distances qui les séparent les unes des autres. Nous pouvons alors présenter le cas d'une manière encore plus simple: la force condensatrice plus grande qui, en *comprimant* les étoiles dans une couche moins profonde, ainsi que l'exprime SEELIGER, a produit la couche stellaire plus dense dans le sens du rayon visuel, doit avoir produit également une accumulation plus forte *perpendiculairement* au rayon visuel, des centres de condensation plus denses, et des ouvertures apparentes plus considérables entre ces accumulations.

Et c'est justement le manque d'uniformité de la zone, l'alternement d'endroits brillants, très condensés, avec des endroits où les rares étoiles ne produisent aucune lueur galactique appréciable, qui nous mène à la conclusion que des régions étendues de la Voie lactée se composent de couches stellaires relativement peu profondes.

§ 23. — Ce n'est pas seulement dans les détails de la Voie lactée que se manifeste le „clustering power": on le reconnaît aussi dans les grandes agglomérations stellaires. Ainsi, à côté de la permanence générale de l'image galactique, des groupes d'ARGELANDER jusqu'aux étoiles de la Voie lactée, la particularité la plus caractéristique de la distribution des étoiles sur l'hémisphère boréal est la permanence et

l'importance de la grande accumulation qui a son centre dans Cygnus (Comp. pg. 24).

Cette accumulation se montre dès qu'on passe des étoiles très brillantes aux étoiles télescopiques (Il est à noter qu'elle n'est pas évidente à l'oeil nu), conserve à peu près sa forme dans les dernières classes d'ARJELANDER, et on retrouve ses parties centrales dans les régions les plus éclatantes de la Voie lactée boréale. Il est impossible d'évaluer même approximativement le nombre des étoiles appartenant à cette partie centrale, vers α et γ Cygni — parceque toutes les parties riches entre Cassiopeia et Aquila paraissent s'y rattacher directement ou indirectement — mais on n'a qu'à jeter les yeux sur la Planche I pour se rendre compte de l'influence prépondérante exercée par cette immense accumulation d'étoiles.

Il est impossible de ne pas reconnaître ici l'existence d'une condensation *réelle*, exceptionnellement forte des étoiles — conclusion appuyée du reste par des considérations d'une autre nature (Comp. *Verslagen K. Ak. v. Wet. Amsterdam, Afd. Nat.* 1897/98, *Astrophys. Journal*, 1900, XII, 2).

§ 24. — Cependant, il n'est pas possible d'expliquer plausiblement certaines particularités qui se sont révélées au cours des présentes recherches, sans faire des suppositions relatives à la distance.

Je ne parle pas ici de suppositions d'une nature générale, s'appliquant à toute une classe d'étoiles d'une grandeur déterminée, — il résulte e. a. des derniers travaux de KAPTEYN que des suppositions pareilles, lesquelles CELORIA, il y a vingt ans, pouvait encore croire justifiées, manquent de fondement — mais de suppositions d'un autre ordre, valables seulement pour une région déterminée du ciel, et pour lesquelles on a tenu compte de la composition stellaire (nombre d'étoiles des différentes grandeurs) de cette région, de sa relation avec d'autres régions, etc.

Ainsi, quand on voit, sur toute l'étendue de la Voie lactée boréale, les étoiles des groupes I et II se condenser vers l'agglomération principale, dans Cygnus, sans paraître subir aucunement l'influence de la „condensation secondaire” dans Auriga et Monoceros — pour les étoiles 0 — 6,5 et même pour des grandeurs plus faibles encore, un minimum s'étend sur Monoceros et Auriga, tandis que le nombre des étoiles brillantes est au-dessus de la moyenne là où, vers Perseus, les étoiles très faibles ont leur minima les plus remarquables — on ne peut se figurer toutes ces accumulations et couches stellaires situées à la même distance de nous;

d'autre part il serait excessivement improbable que l'agglomération Auriga-Monoceros se composât presque uniquement d'étoiles qui seraient *en réalité* exceptionnellement petites; — on est bien forcé d'admettre que le faible éclat moyen des étoiles de l'agglomération Auriga-Monoceros est dû principalement à la distance plus grande de cette agglomération, comparée à l'accumulation dans Cygnus.

Et de même quand nous voyons, en partant de la partie centrale de l'agglomération de Cygnus, les étoiles brillantes se grouper vers le nord, les étoiles faibles se condenser vers le sud, il est difficile de croire à un groupement réel des étoiles, tellement étrange, que les volumineuses se dirigeraient d'un côté, les petites du côté opposé, et cela sur une superficie égale à la moitié de la zone galactique boréale. Il est vrai qu'il doit exister dans l'espace des endroits où le volume (éclat intrinsèque) moyen des étoiles est très inférieur ou très supérieur à la moyenne. Mais il n'y a aucune raison pour admettre que ces lieux exceptionnels se groupent systématiquement autour d'un point déterminé. Aussi la régularité assez grande avec laquelle nous voyons la „prépondérance” (pg. 31) passer du groupe le plus brillant au groupe le plus faible, suivant la direction indiquée plus haut, à travers Cepheus, Cassiopeia, Lacerta, Vulpecula, Aquila et Scutum, le rend déjà très probable que nous avons affaire ici, non à un jeu du hasard, mais à *une diminution graduelle de la distance, quand on considère successivement ces diverses parties de la grande agglomération stellaire*. Cette probabilité devient extrême si l'on tient encore compte des connexions qui existent, ainsi que le montre l'aspect de la Voie lactée, entre les taches et courants lumineux de cette région.

§ 25. — Je ne puis entrer en détails, ici, sur l'aspect de cette région (Comp. *La Voie lactée dans l'hémisphère boréal* (1893) et *Astrophys. Journal* XII, p. 156) mais la relation entre les parties de la Voie lactée situées vers $\beta - \gamma$, σ , $\alpha - \xi$, ε Cygni est tellement évidente, que deux minutes d'étude à l'oeil nu, par un ciel très clair, suffisent à la faire reconnaître. Les photographies de cette région de la Voie lactée ne sont pas moins remarquables sous ce rapport (Comp. celles de MAX WOLF, reproduites dans *Knowledge*, Oct. et Déc. 1891, Febr. 1895, et de BARNARD, *Kn.* Oct. '91). D'ailleurs, déjà PROLÉMÉE et après lui JOHN HERSCHEL ont remarqué que des branches de la Voie lactée paraissent avoir comme point de départ commun un endroit situé dans Cygnus (Comp. ma *Voie lactée*, Introduction).

Le résultat le mieux fondé de l'étude présente, quant à la

structure de la Voie lactée, me paraît être: que des deux branches de la Voie lactée, vers β Cygni et vers γ Aquilae — où la différence entre l'éclat n'est pas très considérable — la branche australe (Aquila, Scutum) est beaucoup plus éloignée de nous que la branche boréale (Cygnus).

Cela n'exclut pas la possibilité, du reste, que des groupes isolés d'étoiles se projettent sur les branches, qui peuvent elles-mêmes se composer d'une série d'amas ou agglomérations plus ou moins intimement liées entre elles. Les photographies paraissent montrer des exemples des deux cas.

La distribution des types A et B (pg. 32) indiquant, pour chaque rectangle, la régularité de la composition stellaire dans le sens du rayon visuel, pourra jeter quelque lumière sur la question si deux couches d'étoiles sont superposées. Là où nous voyons que dans une partie pas trop restreinte de la Voie lactée, il se manifeste un type régulier de distribution, soit A ou B, tandis que la distribution dans une autre région est apparemment irrégulière, il est naturel de supposer qu'il existe une différence notable dans la composition plus ou moins homogène des couches stellaires traversées par les rayons visuels, dans ces deux directions. Une couche très épaisse, d'une composition hétérogène, peut aussi, il est vrai, produire en apparence un type régulier, mais il faut pour cela que dans la direction du rayon visuel il n'y ait pas d'alternement de vides très étendus et de condensations épaisses. Où la courbe de la densité présenterait, dans le sens du rayon visuel, des oscillations d'une forte amplitude et d'une largeur considérable, le nivellement nécessaire à la formation d'un type régulier de distribution ne pourrait pas se produire. La distribution très irrégulière des couches stellaires se manifesterait alors par une densité relativement trop grande ou trop faible d'un des groupes intermédiaires, quand on compare entre elles les valeurs pour les densités dans un même rectangle: un vide considérable entre deux couches stellaires, espacées sur un même rayon visuel, produira, dans le rectangle situé dans cette direction, une densité relativement trop faible pour un groupe intermédiaire.

On pourra donc admettre que dans ces régions de la Voie lactée où règne l'un des types A ou B, la constitution du système stellaire, dans le sens du rayon visuel, est relativement homogène. Il n'est pas étonnant qu'une telle constitution homogène fasse défaut vers les bords des grandes régions maximales, considérées comme des accumulations réelles, mais irrégulières en détail. Mais tandis que la distribution générale des types A et B, dans les régions

pauvres et dans les régions riches de la Voie lactée, s'explique facilement, il est à remarquer que les types réguliers, ou même presque réguliers, manquent beaucoup plus souvent dans la région maximale Cassiopeia-Aquila que dans la région maximale Auriga-Monoceros; puis, il nous reste à trouver une explication pour l'intermixture du type A à l'intérieur de la région la plus fortement condensée (vers α Cygni).

Cette dernière particularité pourra être attribuée à un excès d'étoiles très volumineuses (ou intrinsèquement très brillantes), dans cette région. (Voy. plus haut).

Par contre, une supposition relative à la distance fournit des autres particularités la seule explication plausible. Il sera naturel de supposer alors que, (du moins dans la région maximale, et à l'exception des endroits où une accumulation extrême peut être admise) le type A représente une région stellaire proche, le type B une région éloignée. Dans les zones à l'intérieur de la région maximale, où le type régulier fait défaut, on admettra qu'il existe un vide relatif entre les couches stellaires. C'est une circonstance heureuse, dans une question aussi compliquée que celle de la constitution du système stellaire, que les deux branches de la Voie lactée dans Cygnus et Aquila — situées à des distances très différentes, selon toute probabilité — ne sont superposées que pour une faible partie, ainsi que l'indique déjà l'aspect de la Voie lactée): à cette circonstance est due la composition stellaire, assez régulière relativement, de la majorité des rectangles, même dans l'agglomération Cassiopeia-Aquila.

D'autre part, il est à remarquer que les „ponts lumineux” que les cartes galactiques indiquent entre les deux branches, ne prouvent pas que les deux branches se trouvent à peu près à la même distance; l'une des extrémités d'un tel „pont” peut tout simplement se projeter sur une région galactique beaucoup plus éloignée. Prise en général, le chiffre de la prépondérance dans un rectangle indique que la majorité des étoiles qu'on voit dans cette direction est située à une distance faible, moyenne, ou grande. Il va de soi qu'on évitera d'entrer dans les détails de la distribution.

§ 26. — Comparons cette supposition aux résultats, récemment trouvés par KAPTEYN dans ses recherches sur l'intensité lumineuse des étoiles fixes (*Verslagen K. A. v. Wet.*, Amsterdam, 1900/1901, p. 713), en admettant que ces résultats sont valables pour les divisions de la zone, considérées ici. On peut inférer du tableau 4, pg. 727, *ibid.*, comment varieront les valeurs pour la densité appa-

rente, quand la distance augmente considérablement. Prenons les valeurs de $\log. L$ dans la 2^e, 7^e, 12^e, 17^e colonne, on trouve alors:

$\log L$	$\log \Delta$
4.82	4.68
2.82	7.81
0.82	0.26
8.82	1.41

Si nous faisons maintenant la distance 10 fois plus grande, partant $\log. L - 2$, $\log \Delta + 2$, les valeurs suivantes s'obtiennent:

2.82	6.68
0.82	9.81
8.82	2.26
6.82	3.41

donc, pour les densités correspondantes aux trois valeurs de $\log. L$ communes aux deux séries:

A		B	
I ...	0.006	I ...	0.0005
II	1.8	II	0.65
III	26	III	182

Les moyennes de ces valeurs sont, pour I: 0.0032, pour II 1.22, pour III 104, et il en résulte les valeurs suivantes pour les densités, type A et type B: $\left(\frac{0.006}{0.0032}, \text{etc.} \right)$

A		B	
I ...	1.9	I ...	0.2
II	1.5	II	0.5
III	0.2	III	1.7

Ainsi qu'on le voit, la distribution des grandeurs stellaires, trouvée par KAPTEYN, n'est pas en contradiction avec la supposition que nous avons faite. Ce serait un travail intéressant de pousser plus loin cette comparaison, mais je n'ose décider si les données fournies par la présente étude ne sont pas trop incomplètes, presque rien n'étant connu sur la distribution des étoiles dans l'hémisphère austral, ni si elles comportent la précision nécessaire pour des recherches pareilles.

§ 27. — En terminant, je veux dire quelques mots sur la relation de l'agglomération stellaire de Cygnus avec les étoiles environnantes.

Par hasard, pour le travail que nous venons d'exposer, la zone galactique a été divisée de la sorte, que les environs si remarquables d' α et de γ Cygni ne peuvent être explorés plus en détail, afin de mieux définir la situation des parties les plus condensées pour les classes moyennes. Pour les étoiles galactiques, c'est la grande tache lumineuse β — γ Cy. qui prédomine sur toutes les autres. Or cette tache, remarquable sous plusieurs points de vue (Comp. *Voie lactée boréale*, Description, pg. 43; *Astrophys. Journ.* XII, p. 155. *Verslagen Kon. Akad. Amst. Afd. Nat.* 1897/98, p. 392) a l'aspect d'une lentille vue *presque* sur la tranche. Le bord méridional, situé à peu de distance de l'équateur galactique, mais toujours dans l'hémisphère boréal galactique, est assez nettement défini, il n'en est point ainsi du bord boréal, lequel, selon ce qui a été dit plus haut, serait le plus rapproché du Soleil. Or, il est à remarquer que la lueur est le plus intense vers le bord méridional; qu'elle s'étend en forme d'éventail vers σ et ι Cygni (Voy. les cartes et les photographies) dans la direction où se trouve la région où la Voie lactée boréale se rapprocherait le plus du Soleil; que, selon un travail antérieur (*Verslagen K. Ak. v. Wet. Afd. Nat.*, 1894/95, p. 186) la corrélation entre les diverses grandeurs se prononce exceptionnellement vite tout près de là, au nord-ouest d' α Cygni; que des traînées lumineuses reconnues déjà par HEIS partent de la tache β — γ Cy, vers Lyra et Draco; que suivant les cartes de STRATONOFF, l'influence de l'agglomération se fait sentir sur une grande partie de l'hémisphère boréal, dans tous les ordres d'éclat.

D'ailleurs, les étoiles très brillantes se groupent d'une manière remarquable dans cette partie du ciel, entre le pôle nord galactique, la constellation d'Ophiuchus et la région pauvre en étoiles brillantes qui s'étend sur Lynx pour aboutir à la partie très faible de la Voie lactée dans Perseus. Il me paraît très probable qu'un grand nombre des étoiles brillantes situées dans cette portion de l'hémisphère boréal appartiennent à une couche stellaire se reliant directement à la partie la plus rapprochée de la Voie lactée boréale: dans Cepheus et Cygnus.

Je me propose de développer ces considérations dans une publication ultérieure, où sera également traitée la distribution des nébuleuses par rapport à la composition stellaire de la Voie lactée.

§ 28. — Il paraît résulter de ce qui précède, que la région

condensée principale (Cassiopeia-Aquila) de la Voie lactée boréale se compose principalement de deux couches stellaires, situées à des distances différentes. Ces deux couches correspondent, l'une à la branche boréale de la Voie lactée (Ophiuchus-Cygnus) et à la région entre l'aile boréale du Cygne et Cassiopeia; l'autre à la région Cassiopeia — Lacerta et à la branche australe (Cygnus — Vulpecula — Aquila — Scutum) de la Voie lactée. Les bords intérieurs de ces deux couches stellaires sont en apparence superposés. La couche australe est la plus éloignée, tandis que la partie la plus rapprochée du Soleil, dans cette région de la Voie lactée, se trouve dans Cepheus, au nord d'une accumulation exceptionnellement importante d'étoiles de toutes les grandeurs, dans Cygnus. Les parties qui se projettent entre β Cygni et Ophiuchus, et sur Cassiopeia et Lacerta, se trouvent à une distance moyenne.

Il s'ensuit du reste de la distribution des densités (prépondérances) et de l'aspect de la Voie lactée, que ces couches stellaires ne sont pas indépendantes les uns des autres, que des connexions se trouvent surtout entre l'accumulation stellaire dans Cygnus et la région de Cepheus et Cassiopeia, entre Cassiopeia, Lacerta, Vulpecula et Aquila.

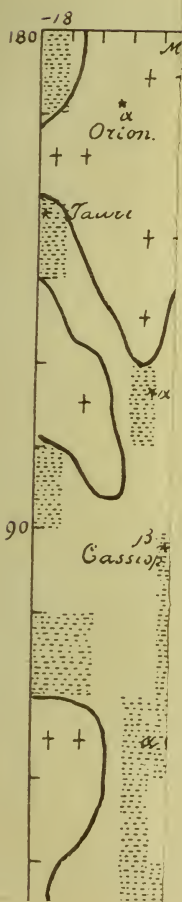
La région condensée secondaire (Auriga — Monoceros) de la Voie lactée boréale paraît être située à une distance intermédiaire entre celles des parties extrêmes de la région Cassiopeia — Aquila.

Cette disposition des étoiles des grandeurs diverses dans la Voie lactée peut s'expliquer plausiblement de la manière suivante:

La région galactique près de γ Cygni forme le noyau d'une énorme agglomération stellaire, centre de courants ou couches composées d'étoiles et amas d'étoiles. Le plus important de ces courants se rapproche le plus du Soleil dans Cepheus, pour se recourber à travers Cassiopeia, en s'éloignant de plus en plus du Soleil, et former ensuite la branche principale de la Voie lactée dans Aquila, Scutum, etc. qui se rattache, en traversant tout l'hémisphère austral, aux condensations stellaires de Monoceros et d'Auriga, entourant ainsi la région de l'espace où se trouve le Soleil.

Rotterdam, 1900—1902.

(12 Januari 1903.)

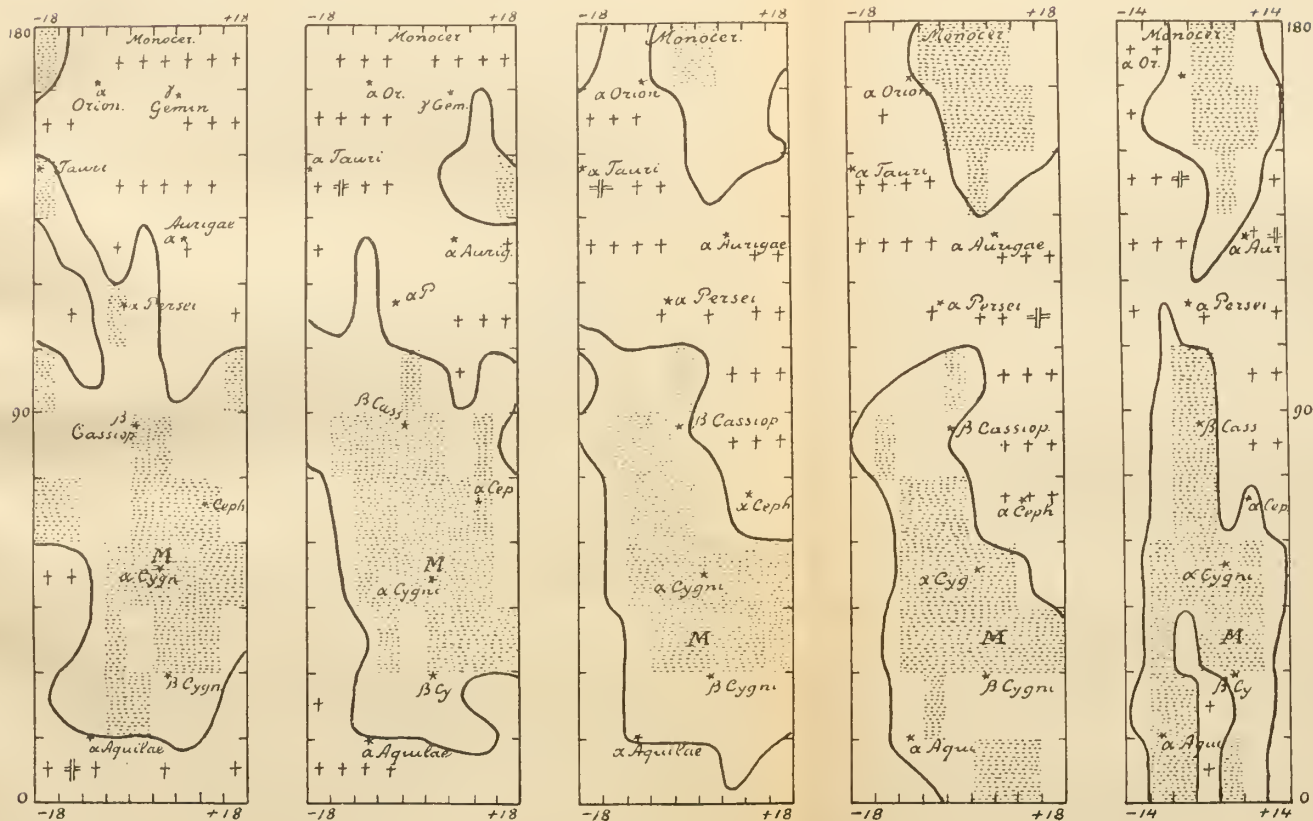


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

PLANCHE I (Pg. 20).

Distribution de la densité des 4 groupes B. D. et de la lueur galactique.

[La ligne forte indique les lieux où la densité moyenne = 1.0. La Région maximale est pointillée; la Région minimale est indiquée par des croix. Maximum maximorum = M; Minimum minimorum = | =]



GROUPE I (0—6.5 Arg.)
(108 rectangles)

Région maximale 25 rect.,
Dens. = 1.21 +
Région minimale 27 rect.,
Dens. = 0.79 —

GROUPE II (6.6—8.0)
(108 rectangles)

Région maximale 25 rect.,
Dens. = 1.17 +
Région minimale 27 rect.,
Dens. = 0.78 —

GROUPE III (8.1—9.0)
(108 rectangles)

Région maximale 22 rect.,
Dens. = 1.2 +
Région minimale 23 rect.,
Dens. = 0.7 —

GROUPE IV (9.1—9.5 Arg.)
(108 rectangles)

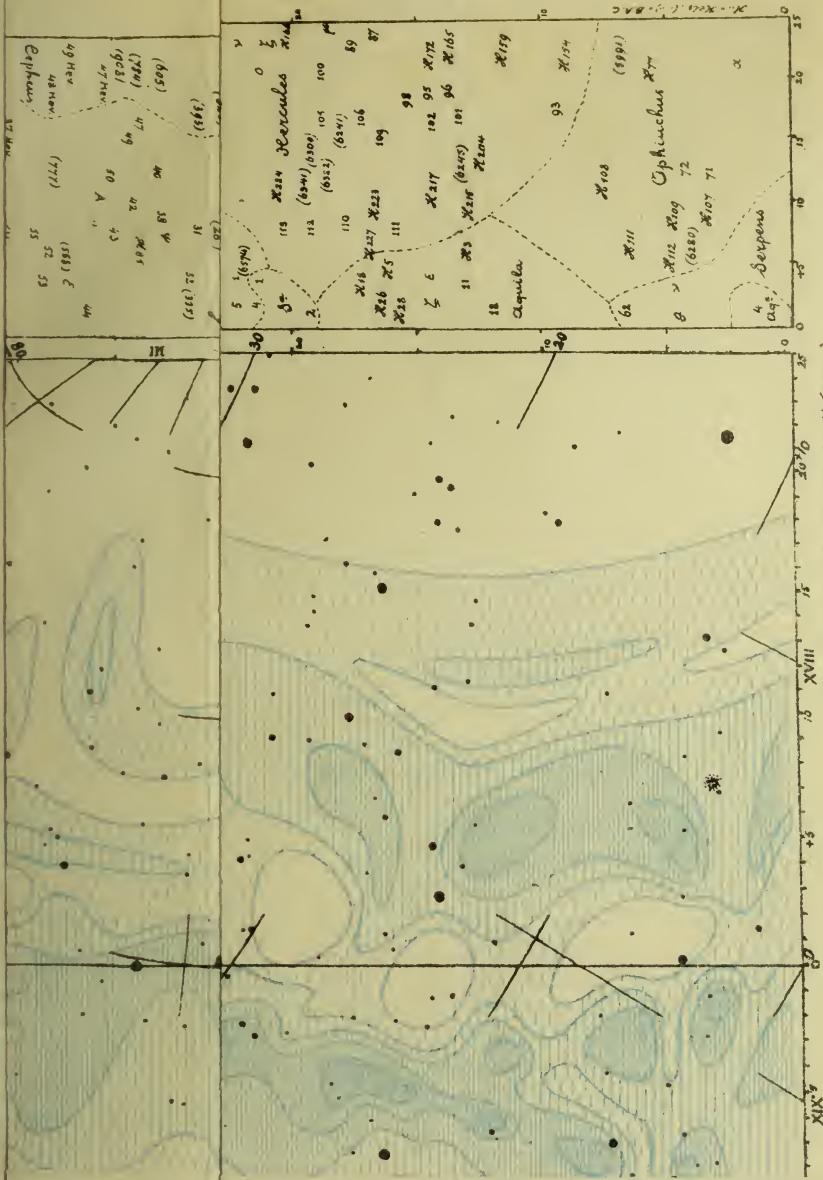
Région maximale 30 rect.,
Dens. = 1.2 +
Région minimale 26 rect.,
Dens. = 0.7 —

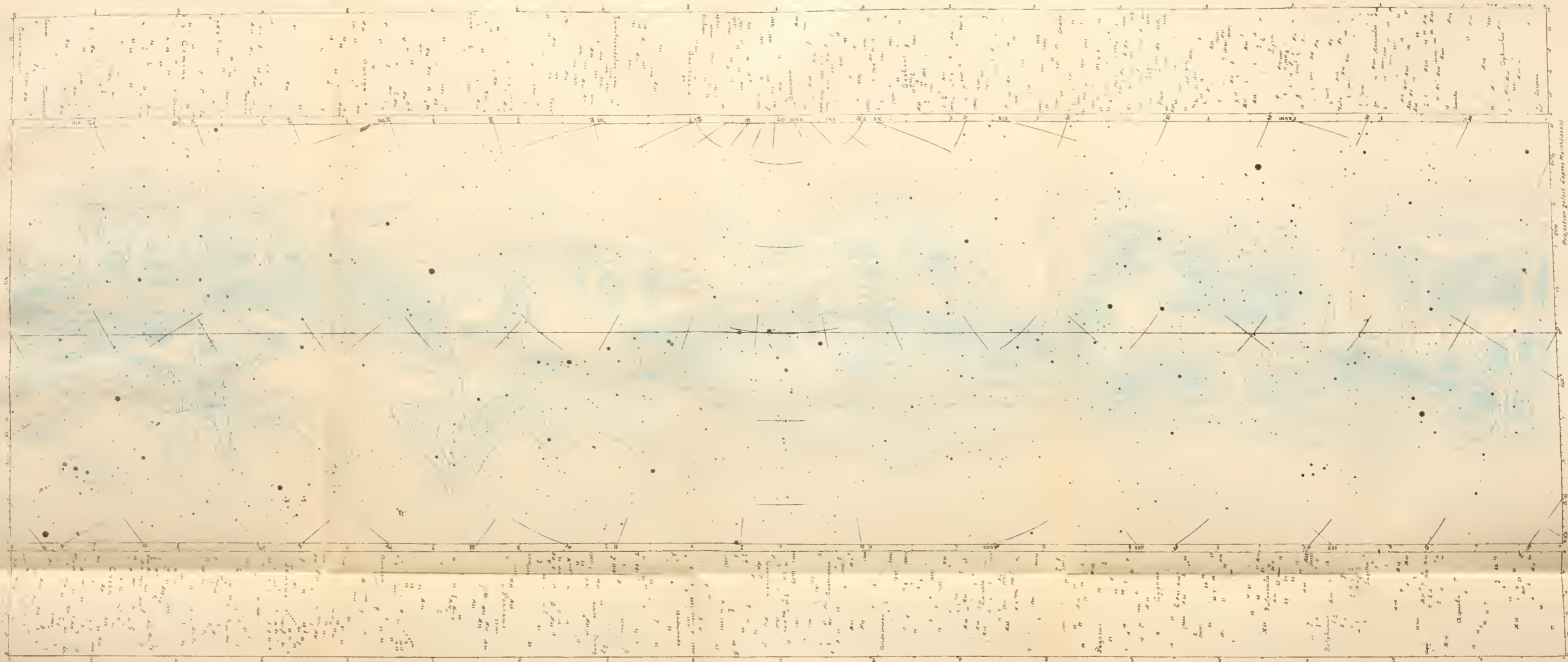
G. (Voie lactée)
(84 rectangles)

Région maximale 27 rect.,
Intensité = 1.22 +
Région minimale 21 rect.,
Intensité = 0.75 —

CARTE ISOPHOTIQUE

Projection galact. d'après Marth (18620)





Electrolyse van eenige Zilver-Zouten,
en over de reactie van Waterstofsuperoxyde met
Zilveroxyde, Zilverbioxyde, enz.

(*Achtste Verhandeling*).

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel VIII. N^o 4.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1903.

Over de Electrolyse van eenige Zilver-Zouten,
en over de reactie van
Waterstofsuperoxyde met Zilveroxyde, Zilverbioxyde, enz.

(Achtste Verhandeling).

DOOR

E. MULDER.

De electrolyse eener waterige oplossing van azijnzuur zilver werd vervolgd, terwijl werd uitgegaan van een versche zoutoplossing (om redenen, die later zullen volgen). De voortgezette studie begon met een *gedeeltelijke* analyse (met 't oog op de zeer kleine hoeveelheid stof beschikbaar) van het zilverzout, dat met water is uitgetrokken (zie de voorgaande Verhandeling), nadat de gemakkelijk vrijkomende zuurstof is uitgedreven (zijnde verondersteld, dat oxy-azijnzuur zilver deel uitmaakt van peroxy-azijnzuur zilver, van welken naam men zich voorloopig bedient). Men was genoodzaakt uit te gaan van vele producten van Bereidingen, namelijk van de groepen van Bereidingen aangegeven door I, II, III en IV (zie de voorgaande Verhandeling), ten einde een hoeveelheid te hebben, voldoende voor een gedeeltelijke analyse, die toch nog voorloopig is (om er later op terug te komen, als de opbrengst van een Bereiding zal verbeterd zijn op bevredigende wijze, zoodat afdoende analyses kunnen volbracht worden).

Zilverbepaling van het zout met water uitgetrokken (zie boven). Er werd uitgegaan van de *totale* hoeveelheid zilverzout, der groepen van Bereidingen I, II, III en IV, die werd omgekristalliseerd (de oplossing werd gefiltreerd) met plaatsing der oplossing onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur), terwijl bij iedere hoeveelheid

van gemeld zout dezer vier groepen was gedaan 3 c. c. water, om het geheel dan eenige dagen te laten staan, dat herhaald zijnde gezamenlijk bedraagt 24 c. c. water. De oplossing werd telken male in denzelfden kroes gedaan (vooraf gewogen), welke bewerking derhalve werd herhaald voor gezegd zout der vier groepen (waarvan de oplossingen waren bij elkander gevoegd), terwijl de oplossing vervolgens werd geplaatst (dus achtereenvolgens tweemaal) onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur). De terugblijvende massa was ten deele vrijwel gekristalliseerd, maar bood enig verschil aan met azijnzuur zilver, naar 't schijnt. De massa was meer gekleurd, dan het geval was met azijnzuur zilver, na onder genoegzaam dezelfde omstandigheden geplaatst te zijn geweest, b.v. zooveel mogelijk gehouden buiten het bereik van zonlicht (er werd een zilverbepaling gedaan van dit azijnzuur zilver ter contrôle, en wel uitgaande van een genoegzaam gelijke hoeveelheid, welks bepaling een voldoende uitkomst gaf). De geheele hoeveelheid stof bedroeg 0.1595 gr., zijnde alles, dat ter beschikking was. Na ontleding bleef terug 0.1141 gr. zilver of 71.55 p. c., bijgevolg veel te veel, want azijnzuur zilver (CH_3 , CO , O *Ag*) eischt 64.65 pc. Daarentegen mierzuur zilver (H . CO . O *Ag*.) vordert 70.57 pc., dus nog lager zijnde dan 71.55. Het is altijd mogelijk, dat er eenige fout insloep, b.v. als gevolg eener gedeeltelijke ontleding van het zilverzout, waarvan samenstelling en natuur nog onbekend zijn. Deze ontleding zou tengevolge kunnen hebben, dat de hoeveelheid 0.1595 gr. stof, waarvan werd uitgegaan, te laag was (de stof was ten deele gekleurd). Wat de vraag betreft, of het zilverzout, hetwelk in onderzoek is, eenvoudig is *mierenzuur zilver*, zoo zou daarop kunnen gezegd worden, dat dergelijk zout zou kunnen ontstaan door oxydatie als afgeleide van azijnzuur zilver, zij deze reactie:



Ten einde zich te overtuigen van de juistheid al of niet hiervan, zou men een *electrolyse* kunnen doen van mierenzuur zilver, dat dit afdoende zou leeren (aangenomen natuurlijk, dat deze electrolyse uitvoerbaar is op voldoende wijze, dat niet het geval is; zie later). Maar het is toch beter, in ieder geval als inleidende proef, om de oplosbaarheid en andere eigenschappen te vergelijken van het zout (afgezonderd uit peroxy-azijnzuur zilver), met mierenzuur zilver, en wel door de waterige oplossing van mierenzuur zilver onder genoegzaam dezelfde omstandigheden te plaatsen zoo veel mogelijk, als het zilverzout der zwarte stof pleegt te worden geplaatst. En dit is gedaan (zie een weinig later).

Merken we nog op met 't oog op het gehalte van gemeld zout aan *zilver* (zie hierboven), dat een ontleed worden van dit zout in dien zin, dat het gehalte aan zilver veel te hoog wordt, weinig kans heeft van in te treden, daar dit vooral in strijd zou zijn met de analyse van *zilverbioxyde* (afgeleid van de zwarte stof, door behandeling met water; zie de voorgaande Verhandeling), die geheel beantwoordt (namelijk de analyse met salpeterzuur) aan hetgeen dit bioxyde verlangt, terwijl het ontledingsproduct hierbij gevormd, wel *onoplosbaar* zal zijn in water, en in dit geval dus vermengd met het *zilverbioxyde* (en daarvan is bij de analyse niets gebleken). Ook zou dit niet in overeenstemming zijn met de uitkomsten bij de behandeling met water, hetzij bij gewone temperatuur, hetzij bij verhitten (namelijk bij het elimineeren der gemakkelijk vrijkomende zuurstof van het veronderstelde oxy-azijnzuur zilver), en de geringe hoeveelheid stof, die onopgelost blijft bij omkristallisatie der massa (zie de voorgaande Verhandeling). Men vroeg zich af, met 't oog op de geringe hoeveelheid stof, en de betrekkelijk groote hoeveelheid water, of ook *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$), blijkbaar wat oplosbaar in water, of *zilveroxyde* ($Ag_2 O$), dat eenigzins oplosbaar is, ook de oorzaak kon zijn van dit verschil der uitkomst verkregen en het gehalte aan zilver van azijnzuur zilver. Dit is evenwel minder waarschijnlijk. Maar in aanmerking genomen, dat de hoeveelheid zilverzout, afgezonderd uit de zwarte stof, meer gekleurd was dan het geval was met azijnzuur zilver, geplaatst geweest zijnde ongeveer onder dezelfde omstandigheden, schijnt het veeleer, dat men te doen heeft met een *ander* zout, of met een mengsel van zilverzouten, waarvan een zou kunnen zijn azijnzuur zilver. In ieder geval is de beschikbare hoeveelheid stof te gering, om deze of gene gevolgtrekking te maken van eenige beteekenis uit deze eerste analytische uitkomst, en nog wel eene partiële analyse. En ten einde de bezwaren aan het onderzoek verbonden meer of min tegemoet te komen, is het wenschelijk voorgekomen, eenige kennis te maken met *mierenzuur zilver* (om daarna glucolzuur te laten volgen, wegens redenen, die later zullen worden medegedeeld), welke kennis zou kunnen strekken tot bevordering der ontwikkeling van het onderwerp, dat ons bezighoudt. Later zal overigens worden gehandeld over de analyse van een andere Groep van Bereidingen.

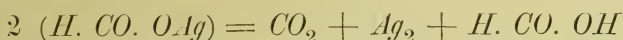
Eenige gegevens met betrekking tot mierenzuur zilver in verband met het zilverzout afkomstig van het zwarte product van electrolyse.
Door eenige eigenschappen van het zilverzout waarvan sprake is

(dat trouwens een mengsel zou kunnen wezen) te vergelijken b.v. met die van mierenzuur zilver, zou men zich wellicht kunnen bedienen van de methode van uitsluiting, en op die wijze met betrekkelijk vrij veel waarschijnlijkheid te weten komen, dat gezegd zout geen mierenzuur zilver is (of een mengsel van zouten). Voor dit doel werd mierenzuur zilver gemaakt, en wel op de volgende manier. Mierenzuur (meer in een onbepaalde hoeveelheid) werd gedaan bij zilveroxyde ($Ag_2 O$), eenig koolzuur zilver bevattende, in water verdeeld (terwijl de massa nu en dan werd geschud en mierenzuur bijgedaan). Na een of een paar dagen te hebben gestaan (bij afsluiting van licht), werd afgeschonken (ten einde de grootste hoeveelheid vrij zuur te verwijderen, dat in overmaat moet aanwezig zijn, vanwege de aanwezigheid van koolzuur zilver), en bij de massa opnieuw water gedaan, om daarna eenigen tijd te laten staan. Een deel dezer oplossing werd geplaatst (na te zijn gefiltreerd) in een glazen schaal (vooraf gewogen), en daarna geplaatst onder een vacuum-exsiccator. Er bleef terug een hoeveelheid aan zilverzout (en zilver), van 0.3268 gr., uitgaande van 20 c. c. van gezegde oplossing, dat dan zou bedragen 0.4085 gr. op 25 c. c. Aangezien men wilde werken onder dezelfde omstandigheden, voorzooverre dit uitvoerbaar is, werd uitgegaan van een hoeveelheid, bijna gelijk aan die van het zilverzout, afgeleid van de zwarte stof van electrolyse. Nu zou de electrolytische oplossing van azijnzuur zilver 0.25 gr. aan zout bevatten in 25 c. c. der oplossing, verondersteld dat zich 10 gr. bevinden in een liter (zie de analyse ter contrôle, pag. 4); en het zilverzout (of mengsel) der reeks van Bereidingen I, II, III en IV bedroeg 0.1595 gr. (zie vroeger), zijnde dit omgekristalliseerd uit een hoeveelheid water van 24 c. c. (de helft hiervan zou hebben volstaan, maar, om geen stof te verliezen, werd de massa, waarvan werd uitgegaan, achtereenvolgens tweemaal behandeld met 12 c. c. water. Want b.v. van groep IV, gaf een behandeling met 3 c. c. water de eerste maal 0.0393 gr., dat maakt 0.3275 gr. op 25 c. c. water).

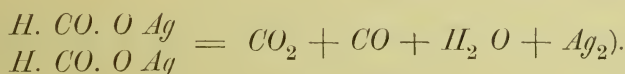
De hoeveelheid van 0.3268 gr. mierenzuur zilver (zie boven) werd behandeld met water, vele malen achtereenvolgens (telkens 20 c. c.); en na te hebben gestaan, werd afgeschonken (dus niet gefiltreerd), terwijl met mierenzuur zilver zooveel mogelijk dezelfde weg werd gevolgd als met het zilverzout van het zwarte product van electrolyse. De oplossing achtereenvolgens verkregen, gaf:

aantal dagen uitgetrokken	hoeveelheid	te zamen
6	0.1764 gr.	0.1764 gr.
6	0.0057	0.1821
6	0.0007	0.1828
6	—0.0001	0.1827.

Onopgelost bleef 0.097 gr. (betrekking hebbende op zilver), en men heeft 0.097 gr. + 0.1827 gr. = 0.2797 gr., terwijl is: 0.3268 gr. — 0.2797 gr. = 0.0471 gr., dat een betrekkelijk groot verschil uitmaakt, en wel als gevolg van oxydatie van mierenzuur zilver, zij deze:



(of:



Het terugblijvende van 0.1827 gr. werd op zijne beurt met water behandeld, en wel met 20 c. c. (eenige malen achtereenvolgens), zooals vroeger (zie boven), de uitkomst waarvan hiernevens wordt gegeven:

aantal dagen uitgetrokken	hoeveelheid	te zamen
6	0.1305 gr.	0.1305 gr.
6	0.0107	0.1412.

Onopgelost bleef 0.0271 gr. (bijgevolg heeft men: 0.0271 gr. + 0.1412 gr. = 0.1683 gr.; en 0.1827 gr. — 0.1683 gr. = 0.0144 gr. (zie boven, een overeenkomstig geval). Op deze hoeveelheid stof, die onopgelost was gebleven (die van 0.0271 gr.) werd water gedaan, en na staan, afgeschonken (de onopgeloste stof is genoegzaam uitsluitend zilver), en gevoegd bij de hoeveelheid van 0.1412 gr. stof (zie boven), terwijl men het geheel liet staan (als altijd onder een exsiccator zonder zwavelzuur). *Thans heeft men te filtreren*, terwijl het filtraat wordt ingedampt (onder een vacuum-exsiccator, zooals regel is), het terugblijvende te wegen, en de som te nemen van onoplosbaar en één oplosbaar residu. Er bleef toch na indampen terug 0.092 gr., terwijl dit gekleurd was als de anderen.

¹⁾ Zie Handl. d. Org. Chem. v. Beilstein, Bd. I, S. 395.

Onopgelost bleef 0.0355 gr. (namelijk van de 0.1412 gr.; zie boven), en op het filtrum 0.009 gr., waarvan dus de som uitmaakt: 0.092 gr. + 0.0355 gr. + 0.009 gr. = 0.1365 gr.

Er werd uitgegaan van 0.3268 gr. stof (zie pag. 6), die trouwens reeds ten deele was ontleed, en waarvan achtereenvolgens onopgelost en opgelost terugbleef:

0.097	gr. in 't begin
0.0271	vervolgens
0.1365	zie boven (ook het oplosbare gedeelte bevattende
	aan 't einde),
—	
som 0.2606	gr.,
—	

bijgevolg een verschil gevende van 0.3268 gr. — 0.2606 gr. = 0.0662 gr., betrekking hebbende op het verlies aan gewicht door oxydatie van mierenzuur zilver (zie pag. 6).

Zooals reeds boven opgemerkt, werd op 't laatst opgelost 0.092 gr. (dat beteekent, dat deze hoeveelheid werd gevonden na indampen). En al is de ontleding van het zilverzout nog niet volledig, kan men er zich toch eenig denkbeeld van vormen, door vergelijking der hoeveelheid 0.092 gr. met die van 0.3268 gr., waarvan werd uitgegaan.

Bij het decanteeren wordt over 't algemeen betrekkelijk veel medegevoerd van de stof (ook te oordeelen naar de kleur, is dit zeker zilver), en dat zoowel bij de eerste behandeling met water als later. Maar desniettegenstaande werd *niet gefiltreerd*, zooals reeds werd opgemerkt, maar zooveel mogelijk de weg gevolgd als met het zilverzout der electrolytische zwarte stof.

Wat betreft de wijze van herleid te worden, zoo geschiedt de ontleding der oplossing van mierenzuur zilver reeds bij gewone temperatuur, gelijk dit volgt uit het voorgaande (zonlicht was buitengesloten, voor zooverre de omstandigheden het toelieten, en de vacuum-exsiccator voorzien van een zwart papieren kap en geplaatst in een donkere ruimte). Toch wordt betrekkelijk veel tijd vereischt (zij dit eenige weken), alvorens de oplossing ieder spoor van mierenzuur zilver heeft verloren (bij afsluiting van licht en gewone temperatuur), dat trouwens het boven gezegde niet buitensluit.

Eenige gegevens met betrekking tot glycolzuur zilver, met 't oog op het zilverzout afgeleid van het zwarte product van electrolyse. Er werd uitgegaan van ongeveer 1.5 gr. glycolzuur, men deed er water bij, en daarna 5 gr. zilveroxyde (koolzuur zilver bevattende

in zeer merkbare hoeveelheid). Na 6 dagen te hebben gestaan, werd gedecanteerd, (om het vrije zuur te verwijderen, dat wellicht voorhanden was), en 20 c. c. water bijgedaan. Na opnieuw te hebben gestaan, werd gefiltreerd, en de vloeistof geplaatst onder een vacuum-exsiccator (bij afsluiting van licht). Het gewicht bedroeg 0.1623 gr. glucolzuur zilver (overeenkomende met een oplosbaarheid van 0.0081 gr. zout in 1 c. c. of 0.081 gr. op 10 c. c. oplossing). Bij het terugblijvende werd andermaal 20 c. c. water gevoegd en gefiltreerd; na indampen bleef terug 0.1499 gr., zijnde 0.0075 gr. op 1 c. c. of 0.075 gr. op 10 c. c. Bij dit laatste voegende 20 c. c. water, en decanteerende, na te hebben gestaan, bleef achtereenvolgens terug:

aantal dagen	gewicht	tezamen
8	0.1432 gr.	0.1432 gr.
10	0.0036	0.1468

Er bleef onopgelost 0.0033 gr., zonder twijfel als product van ontleding onder den invloed van licht vooral, van het glycolzuur zilver, zijnde $0.1468 \text{ gr.} + 0.0033 \text{ gr.} = 0.1501 \text{ gr.}$, dus een verschil gevende van $0.1501 \text{ gr.} - 0.1499 = 0.0002 \text{ gr.}$

Overeenkomstige gegevens (zie een weinig vroeger) betrekking hebbende op glyoxylzuur zilver. Een hoeveelheid van 1.5 gr. glyoxylzuur, goed gekristalliseerd (verkregen door oxydatie van aethylalcohol met salpeterzuur, en ontleding van het calciumzout met zuringzuur; de geheele omzetting der siropige massa in kristallen vorderde trouwens ongeveer twee jaar), werd opgelost in 40 c. c. water, waarna 5 gr. zilveroxyde (ook koolzuur zilver bevattende) werd toegevoegd, terwijl van tijd tot tijd werd geschud. Vervolgens werd gedecanteerd, om vrij zuur, wellicht nog aanwezig, te verwijderen, en bij het terugblijvende 20 c. c. water gedaan, nu en dan geschud, en den volgenden dag gefiltreerd, waarna het filtraat werd geplaatst onder een vacuum-exsiccator, terwijl terugbleef 0.1614 gr. glyoxylzuur zilver, dus op 10 c. c. uitmakende 0.0807 gr. van dit zout.

Bij de zwarte massa werd voor de derde maal water gedaan, en wel 20 c. c. enz., terwijl de vloeistof na filtratie bij indampen gaf 0.1889 gr., of 0.944 gr. zout op 10 c. c. water. Het gemiddelde dezer twee gegevens (namelijk 0.0807 gr. en 0.0944 gr.) bedraagt 0.0875 gr.

Nieuwe Reeks van groepen van Bereidingen. Er werd uitgegaan van een versche oplossing, en dat met reden. De geleidelijke vermeerdering in opbrengst bij de eerste Reeks van groepen van Be-

reidingen, toen werd gewerkt met een en dezelfde oplossing, zou wellicht als vingerwijzing kunnen dienen van belang, wat betreft in 't algemeen de opbrengst, en bijgevolg meer of min ook de zuiverheid van het product. Ook wenschte men in zijn gevolgtrekkingen, niet af te hangen van één enkele oplossing, die door deze of gene reden eenige anomalie zou kunnen vertoonen; in ieder geval is contrôle een vereischte. En, indien werd genomen een *versche* oplossing van azijnzuur zilver, dan was dit in de eerste plaats, om te weten, of deze vrij regelmatige vermeerdering in opbrengst aanvankelijk, zich zou handhaven; dat als uitgangspunt zou kunnen strekken voor belangrijke wijzigingen in de Bereiding der zwarte stof, in verband met de opbrengst (dat weder terugwerkt, zooals reeds gezegd, op de zuiverheid (tenminste tusschen zekere grenzen) waarvan de ontwikkeling van het onderwerp in studie afhankelijk is.

Er werd uitgegaan van een *verzadigde* oplossing van azijnzuur zilver, terwijl meer of min dezelfde weg werd gevolgd als bij de eerste Reeks van groepen Bereidingen (zijnde deze groepen aangegeven met I, II, III en IV). In de volgende Tabel (zie een overeenkomstige Tabel in de voorgaande Verhandeling met betrekking tot de symbolen) bevinden zich eenige gegevens betreffende de opbrengst, de snelheid van ontleding, enz., ten deele met 't oog op een analyse, die er van moet gedaan worden. Later volgt een andere Tabel, meer uitgewerkt, betrekking hebbende op dezelfde Bereidingen, op de wijze als dit geschiedde in de voorgaande Verhandeling met de eerste Reeks van groepen Bereidingen.

Tabel van groep V van Bereidingen met een *versche* oplossing.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N°. 31	3	0.0288 gr.	—	0.0227 gr.	0.0227 gr.	
N°. 32	3	0.0297	0.0227 gr.	0.0224	0.0451	
N°. 33	3	0.038	0.0449	0.0328	0.0777	0.0002 gr.
N°. 34	3	0.0351	0.0776	0.0278	0.1054	0.0001
N°. 35	3	0.0354	0.1053	0.0284	0.1337	0.0001
N°. 36	3	0.036	0.1337	0.0305	0.1642	
N°. 37	3	0.0194	0.1641	0.0136	0.1777	0.0001
N°. 38	3	0.0208	0.1777	0.0161	0.1938	
N°. 39	3	0.0181	0.0193	0.0141	0.2079	
N°. 40	3	0.0275	0.2079	0.0219	0.2298	
N°. 41	3	0.0163	0.2411	0.0115	0.2411	0.0002
N°. 42	3	0.0202	0.2411	0.0151	0.2562	
N°. 43	3	0.0415	0.2558	0.0344	0.2902	0.0004
			0.2896			0.0006

De hoeveelheid stof in het reageerbuisje is bij gevolg 0.2896 gr. (zijnde eerst 0.2902 gr., maar verliezende 0.0006 gr. in gewicht in drie maanden, zie pag. 11 onder aan).

Deze hoeveelheid stof leende zich wel niet tot een bruikbare analyse, niet alleen, omdat deze zeer gering is, maar ook, omdat zij vertegenwoordigt de som van opbrengst van dertien (13) Bereidingen, en een *wasschen* in zulke geringe hoeveelheden kan niet anders dan een betrekkelijk groote fout veroorzaken, voor zooverre de zuiverheid aangaat van het zwarte product. Deze hoeveelheid stof is bestemd, om, zij het ook slechts *meer of min*, de ontledingssnelheid te leeren kennen bij gewone temperatuur, door het buisje met de stof eenvoudig te laten staan (op de wijze als dit werd gedaan met peroxy-salpeterzuur en peroxy-zwavelzuur zilver); noodwendig met het voornemen, de proef later te herhalen onder meer voordeelige omstandigheden.

Over ontledingssnelheid van peroxy-azijnzuur zilver, bij gewone temperatuur. Ten einde eenige gegevens te hebben, zij het dan ook van voorloopigen aard, betreffende dit onderwerp, werd uitgegaan van de Bereidingen N°. 31 tot en met N°. 43 (zie pag. 10), bij gevolg deel uitmakende van de Eerste Reeks van Bereidingen. Bij vergelijking dezer numerique gegevens met die met betrekking tot peroxy-salpeterzuur zilver en peroxy-zwavelzuur zilver, ziet men met één oogopslag, dat er analogie bestaat, vereenigd trouwens met eenig verschil, zooals tevens het geval is met de twee eersten genoemd (zie daarover in de Verhandelingen vroeger, en in deze Verhandeling, laatste gedeelte).

Peroxy-azijnzuur zilver.

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
31-43			27 Juni 1900	0.2902 gr.			
			21 Sept.	0.2896		0.0006 gr.	0.000016 gr.
			21 Dec.	0.2885		0.0011	0.00003
			21 Mrt. 1901	0.2881		0.0004	0.00001
			21 Juni	0.2881		0	0
			21 Sept.	0.2876		0.0005	0.00001
			21 Dec.	0.2876		0	0

De volgende Tabel is slechts een vervolg van de vroeger ge-
gevene (zie pag. 10), zooals het *nummer* der Bereidingen trouwens

vanzelf aanduidt; ook daarom ingevoerd (en dat reeds werkende met peroxy-salpeterzuur en peroxy-zwavelzuur zilver), ten einde de ontwikkeling van het onderwerp, dat ons bezighoudt, behoorlijk te kunnen volgen. Ook verkrijgt men aldus met één oogopslag een overzicht van eenige beteekenis van numerique uitkomsten. Men heeft deze Tabellen afzonderlijk medegedeeld, met 't oog alleen op bewerkingen met ieder dezer te verrichten, terwijl de twee groepen van Bereidingen vereenigd zijn onder den naam van groep V en VI (zie de vroegere Verhandeling over de vorige groepen).

Groep VI. Vervolg van de Tabel van groep V der Bereidingen
(zie pag. 10).

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N°. 44	3	0.0531 gr.	—	0.0432 gr.	0.0432 gr.	—
„ 45	3	0.1372	0.0432 gr.	0.1268	0.17	—
„ 46	3	0.1162	0.1698	0.1078	0.2776	0.0002 gr.
„ 47	3	0.0943	0.2774	0.0868	0.3642	0.0002
„ 48	3	0.1397	0.3642	0.1333	0.4975	—
„ 49	3	0.092	0.4973	0.0865	0.5838	0.0002
„ 50	3	0.1314	0.5836	0.1261	0.7097	0.0002
„ 51	3	0.1149	0.7096	0.1076	0.8172	0.0001
„ 52	3	0.0677	0.8169	6.0617	0.8786	0.0003
„ 53	3	0.0607	0.8783	0.0551	0.9334	0.0003
„ 54	3	0.1172	0.9332	0.1119	1.0451	0.0002
„ 55	3	0.1598	1.0449	0.1524	1.1973	0.0002

Analyse van groep VI der Bereidingen. De hoeveelheid stof, waarover thans kan worden beschikt, is wel voldoende, zijnde 1.1973 gr., evenwel vertegenwoordigende de som aan opbrengst van 12 (twaalf) Bereidingen, dat niet in het belang is der analyse. De zuiverheid toch van het product zou te wenschen kunnen overlaten, als gevolg eener gedeeltelijke ontleding onder den invloed der betrekkelijk groote hoeveelheid water, in verhouding tot de geringe hoeveelheid stof van iedere Bereiding, die ieder voor zich met water is te behandelen.

Bij genoemde hoeveelheid stof, namelijk die van 1.1973 gr., is te voegen de hoeveelheid zuurstof, die is vrijgekomen, toen de stof in het reageerbuisje gedurende vele weken werd bewaard (zie de Tabel), de som waarvan is 0.0019 gr.; en de totale hoeveelheid stof, die als ongeschonden kan worden aangemerkt, wordt bijgevolg:

1.1973 gr. + 0.0019 gr. = 1.1992 gr. Van deze hoeveelheid aan dus geheeten peroxy-azijnzuur zilver, wil men bepalen in de eerste plaats het gehalte aan „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (wel afkomstig van het oxy-azijnzuur zilver, dat wordt verondersteld deel uit te maken van het oorspronkelijk product, waarvan trouwens de structuur nog niet bekend is). Er werden 4 c. c. water gevoegd bij de zwarte stof (gedaan in een reageerbuisje), en overigens werd dezelfde weg als vroeger gevolgd, toen men overeenkomstige analyses deed (zie vroeger). Den eersten dag werd verwarmd tot ongeveer 65°, en den tweeden dag tot en bij 65° (zooveel mogelijk bij afsluiting van licht). Het vrijkomende gas deed zich den eersten dag voor in den vorm van *groot*e bellen, ontstaan door opeenhooping van gas, vrijkomende uit de zwarte stof, die vrij verdeeld was, en dat vooral gedurende de eerste uren van verhitten, waarna de gasbellen zich steeds meer en meer verdeelden. Den tweeden dag beteekende de hoeveelheid gas die vrijkwam zeer weinig, en bijgevolg werd het overbodig geacht, om nog een derden dag te verhitten (zooals dit vroeger bij de analyses plaats had), omdat den tweeden dag ook in de laatste uren geen gas zich meer vertoonde.

Na deze bewerking, werd de reageerbuis geplaatst onder een vacuum-exsiccator (overigens dezelfde wijze van analyseeren volgende in 't algemeen, als bij de Groepen I, II en III, zie de voorgaande Verhandeling), bij afsluiting van licht. Er bleef terug van het mengsel van zilverbioxyde en van het zilverzout, ontstaan door ontleding van oxy-azijnzuur zilver. Het verlies in gewicht was 0.0481 gr., waarbij moet gevoegd worden 0.0019 gr. (zie boven), makende tezamen uit 0.05 gr. of 4.17 proc. (meer nauwkeurig 4.169 proc.). Het gewicht van gezegd mengsel was 1.1492 gr. (zijnde: 1.1973 gr. — 1.1492 gr. = 0.0481 gr.; zie boven), dat langs directen weg gevonden, en bijgevolg de zelfde waarde van 0.0481 gr. op indirecte wijze. Daar 1.1992 gr. is de hoeveelheid stof, waarvan werd uitgegaan, na bijvoeging der hoeveelheid zuurstof, bij staan vrijgekomen (zie vroeger), heeft men bij gevolg: 1.1992 gr. = 1.1492 gr. + 0.05 gr. (zie boven: 0.05 gr. = 0.0481 gr. + 0.0019 gr.).

Het mengsel dezer twee lichamen, zijnde in hoeveelheid 1.1492 gr., werd behandeld met water en wel 8 c. c., terwijl het geheel bij gewone temperatuur aan zichzelf werd overgelaten. Vervolgens werd afgeschonken (bijgevolg *niet* gefiltreerd), bij het terugblijvende op nieuw 8 c. c. water gedaan enz., terwijl de afgeschonken vloeistof werd geplaatst onder een vacuum-exsiccator. Dezelfde bewerkingen werden herhaald, tot de minimum grens was bereikt, wat betreft

de hoeveelheid aan opgelost zout, de uitkomst zijnde achtereenvolgens:

	hoeveelheid	te zamen
1 ^{ste} maal	0.0932 gr.	0.0932 gr.
2	0.038	0.1312
3	0.0244	0.1556
4	0.0059	0.1615
5	0.0015	0.163
6	0.0001	0.1631.

De gekristalliseerde massa was *veel minder gekleurd* dan vroeger het geval was in overeenkomstige gevallen; en er is reden, om aan te nemen, dat de reden hiervan is te zoeken in de betrekkelijk *geringe* hoeveelheid water, namelijk die van 4 c. c., waarmede het zwarte lichaam werd behandeld (zijnde deze vroeger ongeveer 12 c. c. water) op 1 gr. zwarte stof.

Het terugblijvende, namelijk betreffende de 0.1631 gr., werd omgekristalliseerd, door behandeling met 8 c. c. water, gevende achtereenvolgens aan het zilverzout:

	hoeveelheid	te zamen
1 ^{ste} maal	0.1202 gr.	0.1202 gr.
2	0.0413	0.1615
3	0.0009	0.1624.

Onopgelost bleef 0.0009 gr. Nu heeft men: 0.1624 gr. + 0.0009 gr. = 0.1633 gr., terwijl werd gevonden 0.1631 gr. (zie een weinig vroeger), dus een verschil gevende van 0.0002 gr. De hoeveelheid *zilverbioxyde* bedroeg 0.9865 gr. (directe bepaling). Nu heeft men: 0.9865 gr. + 0.1631 gr. = 1.1496 gr., en 1.1496 gr. — 1.1492 gr. = 0.0004 gr. (0.1631 gr. heeft betrekking op de eerste behandeling met water, zie een weinig vroeger).

Daar men een betrekkelijk *veel kleinere* hoeveelheid water had genomen bij de ontleding van het peroxy-azijnzuur zilver tot het elimineeren der „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” (van het oxy-azijnzuur zilver; zie daarover vroeger), wilde men contrôle hebben met betrekking tot de al of niet geheele ontleding. Daarom werd bij gezegd zilverbioxyde (dat zich bevond in een reageerbuisje) 4 c. c. water gedaan, verhit, eerst een uur tot 60° en daarna een half uur bij 60°—90°, waarbij hoegenaamd geen gas vrijkwam, zoodat de

ontleding van het oorspronkelijk product wel volkomen was. Vervolgens geplaatst onder een vacuum-exsiccator, bleef terug 0.9866 gr., dus een niet noemenswaardig verschil gevende van 0.9866 gr. — 0.9865 gr. = 0.0001 gr.

Uitgaande van deze 0.9866 gr. *zilverbioxyde* en daarbij optellende 0.0009 gr. (zie boven), heeft men 0.9866 gr. + 0.0009 gr. = 0.9875 gr. *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$). En er werd gevonden 0.05 gr. voor de *gemakkelijk vrijkomende zuurstof* (zie boven), dat zamen geeft: 0.9875 gr. + 0.05 gr. = 1.0375 gr., zoodat overblijft voor *het zilverzout* (langs indirecten weg bepaald) 1.1992 gr. — 1.0375 gr. = 0.1617 gr., terwijl de directe bepaling gaf 0.1624 gr. (zie boven) dus een verschil opleverende van 0.1624 gr. — 0.1617 gr. = 0.0007 gr. Er is dus gevonden voor de samenstelling der zwarte stof: zilverbioxyde 0.9875 gr. (directe bepaling), verder

„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	0.05
zilverzout	0.1617 (indirect)
som	<hr/> 1.1992 gr. (zie boven),

of op 100 gem.d. der zwarte stof:

zilverbioxyde	82.35
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	4.17 (direct; te nemen in de beteekenis bekend).
zilverzout	13.48 (indirect)
	<hr/> 100 gew.d. zwarte stof.

De overeenstemming met de analyses ¹⁾ der Groepen III en IV (die meer vertrouwen verdienen dan de analyse van Groep I) is betrekkelijk voldoende:

	III	IV
zilverbioxyde	80.74	80.23 (indirect)
zuurstof	4.47	4.9 (direct)
zilverzout	14.79	14.87 (direct)
	<hr/> 100.	<hr/> 100.

Bij de hoeveelheid zilverzout, namelijk die van 0.1624 gr. (zie boven) werd gedaan 12 c. c. water, terwijl dit werd geplaatst onder een exsiccator (zonder zwavelzuur) gedurende vijf dagen

¹⁾ Verhand. der Kon. Akad. v. W. te Amsterdam (Eerste Sectie). Deel VII. N°. 6. pag. 24 (1901).

onder afsluiting van zonlicht. Daarna werd gefiltreerd, en het filtraat gedaan in een porseleinen kroes (vooraf gewogen). De hoeveelheid zout was nu 0.1262 gr., geheel kleurloos, dus in dit opzicht opmerkenswaardig verschillende met het overeenkomstige product der Groepen I, II, III en IV (zie pag. 4). Deze hoeveelheid van 0.1262 gr. zilverzout gaf bij gloeien 0.0907 gr. zilver, overeenkomende met 71.87 pct. (zie pag. 4). Om te beantwoorden aan de samenstelling van het zout $CH_3. CO. O Ag$, zou men hebben moeten vinden 0.0816 gr. zilver, dat dus een verschil uitmaakt van 0.0091 gr. De formule van mierenzuur zilver $II. CO. O Ag$ eischt slechts 70.57 pct. zilver, en zuringzuur zilver $Ag O. CO. CO. O Ag$ zou eischen 71.03 pct. zilver, maar, dit zout is onoplosbaar, om niet van meer te gewagen. Overigens zou het zout kunnen zijn een dubbelzout, enz. Een totale analyse alleen, zou het noodige licht kunnen geven; tevens volstrekt noodig met 't oog op eenige onzuiverheid, die zich kan voordoen, vooral door sporen natriumnitrat, teruggebleven in het koolzuur zilver, bestemd voor het maken van zilveroxyde voor electrolyse (zie pag. 21).

Wat aangaat de betrekkelijke oplosbaarheid van het zilverzout afgeleid van de zwarte stof, en van eenige zouten, die konden optreden, zoo werd op 10 c. c. water gevonden ongeveer voor:

mierenzuur zilver	0.1634 gr.
glucolzuur „	0.0811
gluoxylzuur „	0.0875
azijnzuur „	0.0891 (gemiddeld),

terwijl het zout, afgeleid van de zwarte stof, wellicht ongeveer steemt met 0.1502 gr. Al deze bepalingen hebben betrekking op ongeveer 15° C.

Groep VIII.

Vervolg van de Tabel van groep VI der Bereidingen (zie pag. 12).

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
N°. 56	3	0.1103 gr.	—	0.1041 gr.	0.1041 gr.	— gr.
„ 57	3	0.1054	0.1041 gr.	0.1001	0.2042	—
„ 58	3	0.1171	0.2041	0.1121	0.3162	0.0001
„ 59	3	0.0888	0.3161	0.083	0.3991	0.0001
„ 60	3	0.0802	0.3989	0.0735	0.4724	0.0002
„ 61	3	0.0544	0.4722	0.0484	0.5206	0.0002
„ 62	3	0.0481	0.5205	0.0429	0.5634	0.0001
„ 63	3	0.0545	0.5631	0.0491	0.6122	0.0003
„ 64	3	0.0579	0.612	0.0521	0.6641	0.0002
„ 65	3	0.059	0.6639	0.0529	0.7168	0.0002

Vervolg van het overzicht der verschillende Bereidingen met de nieuwe oplossing van azijnzuur zilver. In de volgende Tabel zijn eenige gegevens verzameld (zie tevens de opgaven van pag. 10 en 11). Men treft er evenzoo de *opbrengst* aan, maar hier in verband met vele andere gegevens, te zamen meer of min een geheel vormende, ook met het doel, om zich eenig denkbeeld te kunnen maken van de ontwikkeling der studie van het lichaam waarvan sprake is, vooral wat betreft de bereiding (zie de voorgaande Verhandeling met betrekking tot de Eerste Reeks van Bereidingen, terwijl deze de Tweede is). Behalve de ruwe opbrengst, zijnde die op het horlogeglas, is de hoeveelheid stof opgegeven na overbrenging der stof in een reageerbuisje (trouwens reeds medegedeeld in de opgaven van pag. 10 en 11), in verband met het water of de verzadigde oplossing van azijnzuur zilver, gedaan bij de oplossing aan electrolyse onderworpen, en ook in verband met de concentratie van den electrolyt. Tevens is er bij opgegeven de hoeveelheid zilveroxyde ($Ag_2 O$) aangewend, trouwens gevoegd bij die van de vorige Bereiding (terwijl het doel, daarmede beoogd, bekend is door de voorgaande Verhandeling, namelijk om het zuur te neutraliseeren, dat als gevolg der electrolyse is vrijgekomen); en daarenboven eenige andere gegevens en opmerkingen.

Uitkomsten der electrolyse eener versche oplossing
van azijnzuur zilver.

Volg- orde. N ^o .	Van de nieuwe reeks de Nos.	Aantal dagen.	Gewicht stof op horloge- glas.	Gewicht stof in reageer- buisje.	Hoeveel- heid water toe- gevoegd.	Hoeveel- heid ver- zadigde oplossing toe- gevoegd.	Concen- tratie.	$Ag_2 O$ bijgedaan.	Opmerkin- gen.	Maand.
31	1	3	0.0288 gr.	0.0227 gr.				8 gr. 84%	Versch. opl.	Maart
32	2	3	0.0297	0.0224				8		
33	3	3	0.038	0.0328				8		
34	4	3	0.0351	0.0278				8		April
35	5	3	0.0354	0.0284				8		
36	6	3	0.036	0.0305				8		
37	7	3	0.0194	0.0136	100 c. c. ¹⁾			8		
38	8	3	0.0208	0.0161			7.66 gr. ²⁾ in 1 Liter	8		Mei
39	9	3	0.0181	0.0141				10		
40	10	3	0.0275	0.0219	40			10		
41	11	3	0.0163	0.0115	40			10	³⁾	

¹⁾ Deze hoeveelheid water heeft betrekking op Bereiding No. 37, en in overeenkomstige gevallen is de wijze van opgeven eenzelfde. Het volumen der electrolytische oplossing werd *ongeveer constant* gehouden.

²⁾ Deze concentratie heeft betrekking op Bereiding No. 37, terwijl de wijze van opgeven eenzelfde is in overeenkomstige gevallen.

Volg- orde. N ^o .	Van de nieuwe reeks de Nos.	Aantal dagen.	Gewicht stof op horloge- glas.	Gewicht stof in reageer- buisje.	Hoeveel- heid water toe- gevoegd.	Hoeveel- heid ver- zadigde oplossing toe- gevoegd.	Concen- tratie.	Ag ₂ O bijgedaan.	Opmerkin- gen.	Maand.
42	12	3	0.0202 gr.	0.0151 gr.		200 c. c. ³⁾	8.72 ²⁾	10	⁵⁾	
43	13	3	0.0415	0.0344	100			10	⁵⁾	
44	14	3	0.0531	0.0432	100			10		
45	15	3	0.1372	0.1268	100			10		
46	16	3	0.1162	0.1078	100			10		
47	17	3	0.0943	0.0868	50			10		
48	18	3	0.1397	0.1333		60 ³⁾	3.96 ²⁾	10		
49	19	3	0.092	0.0865		60 ³⁾		10		
50	20	3	0.1314	0.1261		60 ³⁾		10	⁶⁾	
51	21	3	0.1149	0.1076	34	100 ⁴⁾		10		
52	22	3	0.0677	0.0617		100 ⁴⁾		10	⁷⁾	
53	23	3	0.0607	0.0551		100 ⁴⁾		10	⁷⁾	
54	24	3	0.1172	0.1119	50		5.7	10	⁷⁾	
55	25	3	0.1598	0.1524				10	⁷⁾	
56	26	3	0.1103	0.1041		50 ³⁾		10	⁷⁾	
57	27	3	0.1054	0.1001		50		5	⁷⁾	
58	28	3	0.1171	0.1121		50		5	⁷⁾	
59	29	3	0.0888	0.083		50		5	⁷⁾	
60	30	3	0.0802	0.0735		50		5	⁷⁾	
61	31	3	0.0544	0.0484		50		5	⁷⁾	
62	32	3	0.0481	0.0429	62			5	⁷⁾	
63	33	3	0.0545	0.0491	70			10	⁷⁾	
64	34	3	0.0579	0.0521	70			10	⁷⁾	
65	35	3	0.059	0.0529	70			10		

Deze Tabel (zie hierboven) geeft aanleiding tot eenige opmerkingen (ook in verband met een overeenkomstige opgave in de vorige Verhandeling). Wat in de eerste plaats zou kunnen treffen, is *de vermeerdering* in opbrengst met iedere nieuwe Bereiding, namelijk zoo ongeveer gemiddeld genomen (niet medegerekend Bereidingen, die veeleer niet goed gingen), tot zekere grens is bereikt, waarna deze opbrengst vermindert (zie tevens de Eerste Reeks in de voorgaande Verhandeling). Aangezien wordt verondersteld, dat niet is toegevoegd van een versche oplossing van azijnzuur zilver, maar slechts water (zie later), is deze laatste verandering in den grond

²⁾ Deze concentratie heeft betrekking op Bereiding N^o. 42, terwijl de wijze van opgeven eenzelfde is in overeenkomstige gevallen.

³⁾ De hoeveelheid versche oplossing (in 't algemeen verzadigd) toegevoegd, heeft betrekking op Bereiding N^o. 42, terwijl de wijze van opgeven dezelfde is in overeenkomstige gevallen.

⁴⁾ De versche oplossing (zie boven) bij te voegen, werd soms aanvankelijk gedeeltelijk of geheel ingedampt (namelijk onder een vacuum-exsiccator, bij afsluiting van licht).

⁵⁾ Bij de Bereidingen N^o. 41 en N^o. 42 liet het contact bij de anode wat te wenschen over. Daarin werd voorzien met Bereidingen N^o. 43 enz., door een nieuwe platina-anode te nemen (over een anode met plaat en draad als één lichaam, zie later).

⁶⁾ Het kleine glazen schaalje is van nu af aan, goed vast geplaatst.

⁷⁾ Achtereenvolgens werd bij de cathode gevonden aan zilver 5.3 gr.; 5.6 gr.; 5.2 gr.; 4.2 gr.; 3.61 gr.; 4.09 gr.; 4.13 gr.; 3.67; 3.67; 3.63; 3.28; 2.96; 2.74.

het gevolg van het steeds geringer worden *der concentratie* onder genoemde omstandigheden, en dat wel vooral als gevolg van het *geoxydeerd worden* van een deel van het azijnzuur, welke reactie moet genomen worden in den zin van die, aangegeven als „de reactie van Kolbe”. Laat het nogmaals worden herhaald, het gedurende de electrolyse verdampte water, wordt *vergoed* (zonder bijdoen van een versehe oplossing van het zilverzout). En er werd, te beginnen met Bereiding N°. 37, bij de electrolytische oplossing (waarvan genoeg was voor *één* Bereiding niet meer) een zoodanige hoeveelheid water met iedere nieuwe Bereiding gedaan (de oplossing bevindt zich in de groote platina schaal) dat deze tot boven aan toe was gevuld, terwijl de toestel in werking was (wel te verstaan de schroef van Archimedes, die de oplossing brengt in den kleinen trechter, op zijn beurt geplaatst in den grooten trechter, beiden zilveroxyde bevattende), zoodat ook de groote trechter met vloeistof is gevuld, die daarvan een niet te veronachtzamen hoeveelheid kan bevatten.

Men zou zoo zeggen, in de *eerste* phase van een reeks met een versehe oplossing, dat de opbrengst *vermeerdert* in de mate als de concentratie *vermindert*, terwijl deze met iedere nieuwe electrolyse afneemt (altijd verondersteld, dat niet wordt toegevoegd van een versehe oplossing) om reden vroeger gezegd, namelijk als gevolg der reactie, genoemd die van Kolbe (het azijnzuur, dat tijdens de electrolyse vrijkomt, wordt voortdurend geneutraliseerd; terwijl de hoeveelheid aan zwart product te gering is, om hier in aanmerking te komen).

Over de hoeveelheid verzadigde oplossing van azijnzuur zilver, die is toe te voegen met 'toog op de opbrengst aan zwarte stof bij de electrolytische oplossing. In de eerste reeks van Bereidingen (zie de voorgaande Verhandeling) waren er tusschen de bepalingen van concentratie 7.15 en 2.5 gr. per liter (de laatste bepaling werd eerst later gedaan, en komt niet voor op de Tabel), 14 Bereidingen *acht reenvolgens*, terwijl de opbrengst aan zwarte stof varieerde van 0.0309 gr. door een maximum van 0.055 gr. tot 0.053 gr., in dit aantal Bereidingen. Aangezien het verschil van 7.15 gr. en 2.5 gr. is 4.65 gr., betrekking hebbende op 14 Bereidingen, zou men dus gemiddeld bij iedere Bereiding aanvankelijk hebben toe te voegen 0.33 gr. *azijnzuur zilver* ($\frac{4.65}{14} = 0.33$ gr.; en nemende 8 gr. van dit zout per liter voor een verzadigde oplossing bij *gemiddelde* temperatuur, zou er dan zijn bij te doen 41 c.c. (men heeft: $100 : x = 8 : 0.33$: $x = 41$) der verzadigde oplossing van azijnzuur-

zilver, zij dit bij aanwezigheid eener *overmaat* van dit zout), ten einde de concentratie ongeveer te houden op 5.7 gr. per liter (zie de Tabel der *Tweede Reeks*). In plaats van 41 c. c. werd genomen 50 c. c.

Over een nog niet afgezonderde verbinding, wellicht ontstaande in de oplossing van azijnzuur zilver bij electrolyse. Wel mag het aangemerkt worden als een feit, namelijk, dat gemiddeld de opbrengst vermeerderd aan zwarte stof met iedere nieuwe Bereiding, totdat een zekere grens is bereikt, waarna de opbrengst vermindert om de eenvoudige reden, dat de concentratie in zilverzout steeds geringer wordt (er wordt verondersteld, dat steeds eenzelfde oplossing dienst doet; en dat het water, in een vorige Bereiding verdampt er telkens bij wordt gedaan; zie dienaangaande de vorige Verhandeling). Het is duidelijk, dat in 't algemeen genomen, een afname in concentratie, een vermindering zou moeten veroorzaken aan zwarte stof, maar die vermindering vertoont zich eerst, als de concentratie enig minimum heeft bereikt, waarna de vermindering in opbrengst het wint van die in concentratie. Een verklaring van dit verschijnsel laat zich geven door b.v. aan te nemen:

a. dat de omstandigheden ter vorming der zwarte stof gunstiger zijn met een nieuwe Bereiding (als altijd tusschen twee grenzen) in dien zin, dat de moleculen dezer stof zich dan meer kunnen *ophoopen*, hetgeen de opbrengst bevordert, daar de kans dan kleiner wordt om ontleed te worden onder den invloed van het zuur bij electrolyse vrijkomende;

b. dat er vooral aanvankelijk in de oplossing, tijdens de electrolyse, wordt gevormd van een *oxy-zilverzout* als product eener primaire reactie der electrolytische zuurstof.

Men zou kunnen veronderstellen, dat dit oxy-zout, meer zuurstof vastleggende, zich dan verbindt met zilverbioxyde, ten einde het zwarte product te vormen of het dus geheeten peroxy-azijnzuur zilver (vroeger werd de meening uitgesproken, dat in de eerste plaats een oxy-zout ontstaat, en dat het zilverbioxyde eerder het gevolg is eener *secondaire* reactie). Er valt slechts aan te nemen, dat gezegd oxy-zout *zuurstof* geeft en *azijnzuur zilver*, bij verdampen der oplossing (verondersteld, dat men met dit zout heeft te maken; zie de voorgaande Verhandeling), en een voldoende verklaring schijnt gegeven. Laat nogmaals worden gezegd, dat de

oplossing, zelfs na 30 *electrolysen*, bij verdampen bij gewone temperatuur, een lichaam teruglaat, dat in alle opzichten gelijk op azijnzuur zilver, oppervlakkig beschouwd; ook wordt na langdurig koken geen zilver afgezet (dus afwezig b.v. mierenzuur zilver, glucolzuur zilver, enz.). Maar een andere vraag is het, of alles aldus verloopt. Daarvan zou men zich gemakkelijk kunnen overtuigen, had men niet te doen met zulk een beperkte concentratie, reeds beperkt in den aanvang der electrolyse met een versche oplossing van azijnzuur zilver, in gemeld geval verminderd tot ongeveer 2.5 pct., met een steeds verminderende opbrengst (verondersteld, dat met een en dezelfde oplossing wordt gewerkt).

Waterstofsuperoxyde ($H_2 O_2$) geeft geen zwart afzetsel, wanneer het wordt gedaan bij een oplossing van *azijnzuur zilver*, waarvan men zich vroeger overtuigde (zie de voorgaande Verhandeling). Dat er worde bijgevoegd, dat daarmede de vorming van een oxy-zout niet is buitengesloten, want dit zijn verschillende zaken, die niet moeten verward worden. Later zullen wellicht proeven worden genomen in die richting, maar thans niet, want dit zou eenige moeite kunnen veroorzaken bij de studie in kwestie, aangezien er wel eens een verbinding van een ander karakter zou kunnen optreden als het onderhavige. Ook is het goed te herhalen, dat de zuiverheid van het product niet was aan te toonen tot nogtoe, en dat de kans altijd bestaat, dat het zilveroxyde ($Ag_2 O$) gebruikt, sporen bevat aan salpeterzuur natrium, teruggebleven in het koolzuur zilver bij de bereiding; en dus als gevolg daarvan het afzetsel meer of minder bevat aan peroxy-salpeterzuur zilver.

Over eenige wijzigingen gebracht in de inrichting van den toestel ¹⁾. Het is er vooral om te doen, de opbrengst aan zwarte stof te verbeteren; en de veranderingen, die zijn aangebracht (al mogen ze wellicht den schijn hebben, van te zijn van betrekkelijk weinig belang) gaven voldoende uitkomsten, waarvan men zich kan overtuigen door de Tabellen, welke in dit opzicht duidelijk spreken. De gezegde wijzigingen zijn:

1°. Er is een inrichting aangebracht ten doel hebbende, *de elektroden zoo onbewegelijk* mogelijk te maken, op den weg van af de electrische batterij tot de platina schaal (bevattende de electrolytische oplossing), en wel, door in het verticale plankier (aan de kast om den toestel, voor het grootste gedeelte overigens bestaande

¹⁾ Zie over den toestel: „Verh. der K. Akad. v. W. te Amsterdam (Eerste Sectie), Dl. VI, N°. 5, pag. 6, 17, 26, 38, 39.

uit glas) *twee cylindervormige stukken* aan te brengen *van eboniet*, voorzien van koperen schroeven, en dat alles ter bevestiging der electrodën (zijnde deze geïsoleerd, zooals duidelijk is, en wel met caoutchouc).

2°. De platina schaal, enz., werd geplaatst in een ondiep porcelein vat, betrekkelijk grooter, en waarvan het doel is, om te kunnen redden de electrolytische oplossing van azijnzuur zilver, in geval eener *verstopping* op het filtrum (met zilveroxyde, namelijk in den grooten trechter), en alzoo het verlies te ontgaan der overgelopen oplossing.

3°. Met 't oog op zulk een overloopen (dat zich trouwens nog niet voordeed, maar in zulk een geval aanleiding zou geven tot een groot verlies aan tijd; zie de Tabellen der twee Reeksen) is de groote trechter (zie boven) geplaatst op een *glazen ring* (gemaakt van een trechter), terwijl deze laatste geplaatst is op den koperen ring van een statief, wel te verstaan, na plaatsing van haakjes van glasdraad (ten getale van drie) tusschen de twee ringen (namelijk die van koper en glas), ten einde, in geval van een overloopen, te voorkomen een contact der oplossing van azijnzuur zilver met koper, dat zou beteekenen een *verliezen* dezer (van zulke haakjes van glas, ook drie in aantal, zijn tevens geplaatst tusschen den grooten trechter en genoemden glazen ring).

4°. Aangezien het blijkbaar van belang is, met 't oog op de opbrengst (deze opgevat in kwalitatieven en quantitatieven zin), dat het kleine glazen schaalje betrekkelijk *vast* staat, met 't oog op een rustig gevormd worden der zwarte stof, is daarvoor een geheel speciale inrichting getroffen. Dit kleine glazen schaalje is namelijk geplaatst op een glazen driehoek voorzien van *drie pootjes*, naar *boven* gekeerd, en het schaalje tusschen deze drie pootjes geplaatst, meer of min *gedrukt*, om een verplaatst worden van het schaalje zoo goed als tegen te gaan (daarin is de anode geplaatst); zie een weinig verder. Laat er duidelijkshalve aan worden toegevoegd, dat het zware gewicht (van het uurwerk, gevende de vereischte levende kracht voor de schroef van Archimedes), bevestigd aan een staaldraad, nu en dan (vooral evenwel als gevolg der constructie, die nog wat te wenschen overlaat) aanleiding geeft tot schokken, die overigens niet krachtig zijn, maar vroeger eenige malen aanleiding gaven tot een merkbare verplaatsing van het kleine glazen schaalje, en dat wel ten koste der vorming van de zwarte stof. Ten einde te voorkomen, dat de glazen driehoek zich verplaatst, (anders zou alles te vergeefs wezen) is een der pootjes voorzien van een verlengstuk, aan het uiteinde omgebogen, welk laatste gedeelte

gaat door een caoutchouc-kurk (met 't oog op de schokken), op hare beurt bevestigd aan een statief (geplaatst op het plankier, waarop zich bevindt de platina schaal, enz.).

5°. De kast ¹⁾ om den geheelen toestel (ten einde dezen te vrijwaren voor stof enz., gemaakt van hout en grootendeels van glas) is bedekt met zwart papier gedurende de electrolyse, om het zonlicht meer of min af te sluiten, daar men te maken heeft met een oplossing van een zilverzout met een organisch zuur; maar toch ook met 't oog op de zwarte stof.

Analyse van zilverbioxyde, afgeleid van peroxy-zwavelzuur zilver. Men wenschte nog een analyse te doen van dit bioxyde, namelijk met een veel grootere hoeveelheid stof, met 't oog op de belangstelling, die het onderwerp vordert. Met dit doel, werd uitgegaan van zwarte stof, die bevrijd was van gemakkelijk vrijkomende zuurstof'' (zij deze van oxy-zwavelzuur zilver), en niet minder bedragende dan 16.8654 gr. Deze massa werd met *water* behandeld bij *gewone* temperatuur, en wel werd telkenmale 25 c. c. bijgedaan, waarna men het geheel liet staan; alles te zamen genomen bedroeg de hoeveelheid water ten slotte 1475 c. c., dus ongeveer 1.5 liter, in verloop van ongeveer 20 maanden. De massa werd met water behandeld tot de vloeistof (die, na afschenken, werd gefiltreerd) niet meer de reactie gaf met baryumchloride (eerst werd zoutzuur toegevoegd, ter verwijdering van zilver, en gefiltreerd). De massa (die zich bevond in een *grote* reageerbuis), werd vervolgens geplaatst onder een vacuum-exsiccator, en de bewerking herhaald, tot het gewicht er van constant was, zijnde dit 10.0858 gr. De vloeistof, die werd afgeschonken, sleepte altijd wat bioxyde met zich, dat verklaart het verlies aan bioxyde (zie een weinig later) De formule $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 S_2 O_7 Ag_2$ eischt:

„gemakkelijk vrijkomende zuurstof''	4.90
zilverbioxyde	63.26
zwavelzuur zilver	31.84

100.

Men heeft te doen met een *mengsel* van zilverbioxyde en zwavelzuur zilver, bijgevolg in de verhouding van 63.26 : 31.84, zoodat 63.26 gr. + 31.84 gr. = 95.1 gr. bevat 63.26 gr. bioxyde, en 16.8654 gr., zij dit *het mengsel* waarvan werd uitgegaan, zou dus

¹⁾ I.e. Deel VI. N°. 5, pag. 38.

moeten beantwoorden aan een opbrengst van 11.218 gr. bioxyde, dus vertoont zich een verlies van: 11.218 gr. — 10.0858 gr. = 1.1322 gr., eenvoudig verloren gegaan door bovengenoemde oorzaak (nog zou er bijgevoegd kunnen worden, dat een weinig bioxyde zal opgelost zijn in deze groote massa water, aangezien het bioxyde waarschijnlijk eenigzins oplosbaar is; ook bleef de reactie op zilver in het filtraat zich vertoonen, nadat zwavelzuur zilver was verwijderd, en de reactie op zwavelzuur dus niet meer intrad).

Een deel nu van dit bioxyde werd aan analyse onderworpen, en wel in een reageerbuis, vooraf gewogen, volgens de gebruikelijke methode (na, vóór de analyse, onder een vacuum-exsiccator geplaatst geweest te zijn, tot het gewicht constant was), in hoeveelheid bedragende 0.5892 gr. Er werd water bijgedaan, vervolgens salpeterzuur, onder verwarming, en de reageerbuis daarna geplaatst onder een vacuum-exsiccator, tot het gewicht constant bleef, opleverende 0.8044 gr. *salpeterzuur zilver*. Aangezien dit bevat 0.5486 gr. zilveroxyde ($Ag_2 O$), wordt gevonden voor de „gemakkelijk vrijkomende zuurstof”: 0.5892 gr. — 0.5486 gr. = 0.0406 gr. of 6.89 pct., bijgevolg:

	gevonden $Ag_2 O_2$ vordert:	
zilveroxyde	93.11	93.54
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	6.89	6.46
	<hr/> 100.	<hr/> 100.

Analyse van het zilverbioxyde afgeleid van peroxy-azijnzuur zilver zoogenaamd. De hoeveelheid bioxyde van Groep VI (zie pag. 15) bedroeg 0.9866 gr. Op gewone wijze behandeld met salpeterzuur, na aanvankelijk toevoegen van water, bleef er terug, na staan onder een exsiccator (zooals altijd in dergelijke gevallen, met zwavelzuur en kalk), aan salpeterzuur zilver 1.3521 gr. beantwoordende aan 0.9221 gr. zilveroxyde ($Ag_2 O$). Bijgevolg heeft men voor „gemakkelijk vrijkomende zuurstof” 0.9866 gr. — 0.9221 gr. = 0.0645 gr., of op 100 gew. d. zilverbioxyde:

	gevonden $Ag_2 O_2$ eischt:	
zilveroxyde	93.45	93.54
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	6.55	6.46
	<hr/> 100.	<hr/> 100.

Electrolyse van monochloorazijnzuur zilver. Er werd aan electrolyse onderworpen een geconcentreerde oplossing van dit zout, terwijl onafgebroken werd gefiltreerd bij de anode (op de wijze, bekend), en wel eerst door een filtrum met koolzuur zilver, en in een tweede proef met zilveroxyde, ten einde de oplossing te neutraliseeren, door electrolyse zuur geworden. De uitkomst was evenwel niet aanmoedigend, daar de hoeveelheid aan zwarte stof afgezet, geen studie toeliet in dien zin. Men begrijpt, dat meer of min hierbij ook werd gedacht aan electrolyse van glucolzuur zilver, welk lichaam zou kunnen optreden onder gezegde omstandigheden in de electrolytische oplossing.

Snelheid van zelfontleding van peroxy-zwavelzuur zilver. In de volgende opgaven (zie de vorige Verhandelingen ¹⁾) is opgegeven onder letter:

- c. het nommer der Bereiding;
- d. de concentratie;
- e. de datum der Bereiding;
- f. de datum der eerste weging en volgende wegingen;
- g. het gewicht aan zwarte stof op het *horlogeglas*, dadelijk geplaatst zijnde onder een vacuum-exsiccator (met zwavelzuur), terwijl de weging plaats had tusschen twee op elkander gesleepte horlogeglazen (met klem). Ook is hieronder (namelijk onder g) gegeven het gewicht der stof, na te zijn overgebracht in een *klein buisje* (met glazen stop), dat wordt geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur);
- i. geeft het verlies in gewicht der stof, bevat in dit buisje;
- j. dit verlies berekend op 1 gr. stof en 7 dagen.

¹⁾ Zie b.v. Verhand. d. Kon. Akad. v. W. van Amsterdam. Deel III. N°. 8, pag. 28 (1896).

Peroxy-zwavelzuur zilver.

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
20	half.verz.	14-18 Juni 1898.	20 Juni 1898.	1.2791 gr.	0.0002 gr.		
			21 " "	horloge- glas			
			22 " "	1.2098 gr.			
				in buisje.			
			22 Sept. "	1.1996 gr.	—	0.0102 gr.	0.00065 gr.
			22 Dec. "	1.1965 "	—	0.0031 "	0.00019 "
			22 Maart 1899.	1.1957 "	—	0.0008 "	0.00005 "
			22 Juni "	1.1945 "	—	0.0012 "	0.00007 "
			22 Sept. "	1.1914 "	—	0.0031 "	0.0002 "
			22 Dec. "	1.1902 "	—	0.0012 "	0.00007 "
			22 Maart 1900.	1.1896 "	—	0.0006 "	0.00004 "
			22 Juni "	1.1889 "	—	0.0007 "	0.00004 "
			22 Sept. "	1.187 "	—	0.0019 "	0.00012 "
			22 Dec. "	1.186 "	—	0.001 "	0.00006 "
			22 Maart 1901.	1.1852 "	—	0.0008 "	0.00005 "
			22 Juni "	1.1843 "	—	0.0009 "	0.00005 "
			22 Sept. "	1.1823 "	—	0.002 "	0.00013 "
			23 Dec. "	1.1811 "	—	0.0012 "	0.0007 "
			24 Maart 1902.	1.1804 "	—	0.0007 "	0.00005 "
21	half.verz.	1-4 Juli 1898.	6 Juli 1898.	1.2983 "	—	—	—
			7 " "	horloge- glas	0.0002 "		
			8 " "				
			8 " "	1.2674 gr.			
				in buisje.			
			8 Oct. "	1.256 gr.	—	0.0114 "	0.00069 "
			9 Jan. 1899.	1.2548 "	—	0.0012 "	0.00007 "
			10 April "	1.2537 "	—	0.0011 "	0.00006 "
			10 Juli "	1.2519 "	—	0.0018 "	0.0001 "
			10 Oct. "	1.249 "	—	0.0029 "	0.00017 "
			10 Jan. 1900.	1.248 "	—	0.001 "	0.00006 "
			9 April "	1.2474 "	—	0.0006 "	0.00004 "
			10 Juli "	1.2471 "	—	0.0003 "	0.00002 "
			10 Oct. "	1.2454 "	—	0.0017 "	0.0001 "
			8 Jan. 1901.	1.2445 "	—	0.0009 "	0.00005 "
			9 April "	1.244 "	—	0.0005 "	0.00003 "
			9 Juli "	1.2433 "	—	0.0007 "	0.00004 "
			8 Oct. "	1.241 "	—	0.0023 "	0.00015 "
			9 Jan. 1902.	1.24 "	—	0.001 "	0.00006 "
			9 April "	1.2392 "	—	0.0008 "	0.00005 "

Zelfontleding van peroxy-salpeterzuur zilver ¹⁾ Dit heeft betrekking op Bereiding N°. 25, en de nieuwe numerieke gegevens zijn een vervolg op vroegere uitkomsten dezer soort. Het is nu het vijfde (eigenlijk het zesde) jaar (zie later), dat het product dezer Bereiding quantitatief is vervolgd, wat betreft de snelheid van ontleding. Voor de structuurformule is gevonden, in overeen-

¹⁾ Verhand. Kon. Akad. (Eerste Sectie) Dl. VII N°. 2 p. 23 (1899).

stemming met de tot nog toe vastgestelde feiten, de volgende: $3 Ag_2 O_2 \cdot NO_3 Ag \cdot 2 O$, en genoemde snelheid van ontleding heeft betrekking op een deel van het molecuul, namelijk op dat, aan te duiden met den naam van oxy-salpeterzuur zilver $NO_3 Ag \cdot 2 O$ (deel uitmakende van het molecuul, te weten van het peroxy-salpeterzuur zilver). Ten minste bestaat er aanleiding, dit aan te nemen, daar het lichaam ontleed wordt bij verhitten met water (ook wel bij gewone temperatuur, maar dan uiterst langzaam), waarbij het zilverbioxyde onopgelost terugblijft, en het *silvernitraat* in oplossing treedt, onder vrijkomen van zuurstof.

Ontleding bij gewone temperatuur van peroxy-salpeterzuur zilver (vervolg).

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>
25	200 gr.	25 Nov. 1895.	28 Nov. 1895. 15 Dec. 1896. 16 " 1897. 16 " 1898. 18 " 1899. 18 " 1900. (18 " 1901.	5.7658 gr. 5.7492 " 5.7348 " 5.7158 " 5.6955 " 5.6791 " 5.6678 "		0.0166 gr. 0.0144 " 0.019 " 0.0203 " 0.0164 " 0.0113 "	0.000052 gr. 0.000047 " 0.000063 " 0.000067 " 0.000055 " 0.000038 ") ¹⁾

De regelmatigheid in ontledingssnelheid bij gewone temperatuur is wel merkwaardig, en biedt in dit opzicht een meer of min eenig voorbeeld aan. Voegen we hier aan toe duidelijkshalve met betrekking tot de Tabel, dat onder letter *j* is aangegeven de hoeveelheid „gemakkelijk vrijkomende zuurstof”, die bij staan vrijkwam, genomen op 1 gr. stof in één week. Onder letter *i* is opgegeven de hoeveelheid van genoemde zuurstof, op 5.7658 gr. betrekking hebbende, namelijk op de hoeveelheid stof bij het begin, in den tijd van 5 jaar verminderd met 0.0867 gr. (men heeft: 5.7658 gr. — 5.6791 gr. = 0.0867 gr.), of op 1 gr. der stof overeenkomende met 0.015 gr. Aangezien 0.03384 gr. (l.c.) de hoeveelheid is, die overeenkomt met 2 *O* op het molecuul, genomen op 1 gr. stof, wordt gevonden voor den tijd, die zou vereischt worden voor het doen vrijkomen van 2 *O*, in verband met de gevonden waarde van 0.015 gr. (zie boven):

$0.015 : 0.03384 = 5 : x$, zijnde bij gevolg $x = 11.28$ (vroeger ²⁾ werd 13 en daarna 12 jaar gevonden).

¹⁾ Later bijgevoegd voor het zesde jaar.

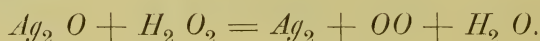
²⁾ l.c. Verh. d. Kon. Akad. v. W. v. Amsterdam, Deel VII, N°. 2 p. 28. (Eerste Sectie).

Electrolytische proef met een waterige oplossing van seleenzuur zilver. De electrolyse geschiedde onder gunstige omstandigheden, namelijk met neutralisatie der oplossing met *koolzuur zilver*, op een filtrum geplaatst, en van seleenzuur zilver op een tweede filtrum, om de oplossing verzadigd te houden (geheel als bij de electrolyse van zwavelzuur zilver; zie de vorige Verhandelingen), en dat gedurende drie dagen achtereenvolgens (dag en nacht), maar zonder eenige positieve uitkomst. En dit laat zich wel verklaren, vooreerst omdat de oplosbaarheid van seleenzuur zilver zeer beperkt is, want 20 c. c. eener verzadigde oplossing bij ongeveer 15°, liet achter 0.0167 gr. zout bij verdampen, zij dit 0.835 gr. zout in een liter aan oplossing. Ook maakt de wel bekende reactie ¹⁾ van seleenzuur:



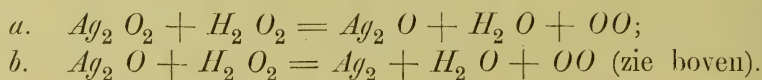
het waarschijnlijk, dat de kans voor het bestaan van een zuur $Se O_{4+x} H_2$ gering is.

Geoxydeerd water tegenover zilveroxyde, zilverbioxyde, koolzuur en salpeterzuur zilver, en diphenylamine. In 't algemeen schijnt te worden aangenomen, dat zilveroxyde en geoxydeerd water elkan- der aldus ontleden:

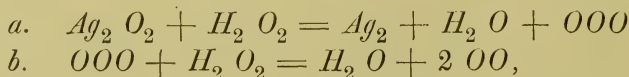


Niet weinig echter wordt vergeten, er bij te voegen, van welk oxyde men zich bediende, namelijk gemaakt langs den natten weg of b.v. door verhitting van koolzuur zilver (of zilverbioxyde), dat tot eenig verschil aanleiding zou kunnen geven.

Uitgaande van gemelde vergelijking, zou men geneigd kunnen wezen, voor *zilverbioxyde* en *waterstofbioxyde* de volgende reacties aan te nemen:



En een intermediaire reactie zou kunnen plaats hebben, zij deze:



¹⁾ Zie b.v. de Dict. v. Wurtz. Tom. 2. p. 1469.

²⁾ Zie Berthelot: J. Ch. Soc. Vol. 38 (1880), namelijk Abstr. Anorg. Ch. p. 441; l.c. pag. 442; l.c. Vol. 79 en 80 (1901), Jan. Abstr. II pag. 8; l.c. (1902), Juli, pag. 383; l.c. (1902) Jan. pag. 18; April pag. 207; Bach l.c. April pag. 203. Zie v. Baeyer: l.c. (1901) Juni, pag. 315; l.c. Dec., pag. 654. Zie ook „Dict. Wurtz. Tom. 1, pag. 1199 (Eau oxygénée).

dat van hoegenaamd geen invloed is op de einduitkomst. Maar, zooals later zal blijken, is het verloop geheel anders, zoowel wat betreft *zilveroxyde* als *zilverbioxyde*.

Zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) tegenover *waterstofbioxyde* ($H_2 O_2$). *Eerste proef*. Het waterstofbioxyde, zijnde een waterige oplossing, waarvan men zich aanvankelijk bediende, bevatte een weinig *zwavelzuur* (later werd gebruik gemaakt van geoxydeerd water, dat zuiver heette te zijn). Er werd uitgegaan van 0.4042 gr. *zilverbioxyde* (als ontledingsproduct van peroxy-zwavelzuur zilver, zij dit $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 SO_7 Ag_2$, daarbij een methode volgende, die men vroeger leerde kennen; zie pag. 24), van de samenstelling:

	gevonden $Ag_2 O_2$ eischt:	
zilveroxyde ($Ag_2 O$)	93.11	93.54
„gemakkelijk vrijkomende zuurstof”	6.89	6.46
	100.	100.

Bij genoemde hoeveelheid bioxyde werd 10 gr. water gedaan, terwijl het geheel zich bevond in een groote reageerbuis, met een klein toegesmolten trechtertje (met 't oog op stof); daarna werd er geoxydeerd water bij gedaan (in waterige oplossing, een weinig zwavelzuur bevattende), terwijl de buis later werd geplaatst in een vacuum-exsiccator, waarbij 0.4209 gr. terugbleef van een mengsel (de bewerking werd herhaald, tot het gewicht constant bleef).

Zuurstof komt vrij onder opbruising, zoodra geoxydeerd water is toegevoegd. Het residu in de buis werd behandeld met water (bij gewone temperatuur, waarna werd gefiltreerd), de oplossing waarvan, onder een vacuum-exsiccator, terugliet 0.0721 gr. aan zwavelzuur zilver ($SO_4 Ag_2$). Dit geeft voor *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$) 0.4209 gr. — 0.0721 gr. = 0.3488 gr. De hoeveelheid van 0.0721 gr. *zwavelzuur zilver* komt overeen met 0.0498 gr. *silver*, en dit met 0.0571 gr. *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$), te zamen makende: 0.3488 gr. + 0.0571 gr. = 0.4059 gr. *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$). Aangezien was uitgegaan van 0.4042 gr. van dit oxyde, heeft men: 0.4059 gr. — 0.4042 gr. = 0.0017 gr., zoodat de hoeveelheid *bioxyde* gerekend kan worden zoo ongeveer hetzelfde te blijven, namelijk voor en na de behandeling met geoxydeerd water ($H_2 O_2$), dat trouwens een weinig zwavelzuur bevatte, hetwelk noodwendig invloed zou kunnen hebben op de uitkomst, en, ten minste gedeeltelijk, gemeld verschil veroorzaken. Hetgeen aanleiding gaf, onder meer, om voortaan zoogenaamd *zuiver* geoxydeerd water ($H_2 O_2$) te gebruiken, welke

zuiverheid meer of min volgt uit de volgende (gedeeltelijke) analyse, zoo mede indirect uit eenige numerique uitkomsten (die later volgen).

Gedeeltelijke analyse van zoogenaamd zuiver geoxydeerd water. Het geoxydeerde water, waarvan sprake is, van Merck, is geacht in waterige oplossing 30 pct. in gewicht waterstofbioxyde ($H_2 O_2$) te bevatten in 100 vol. der oplossing, zij dit 30 gr. in 100 c. c. Een hoeveelheid van 10 gr. dezer oplossing werd geplaatst onder een *vacuum-exsiccator*, waarvan achterbleef 0.0005 gr.; bij gevolg, is het geoxydeerde water waarschijnlijk *betrekkelijk zuiver*. De oplossing gaf ook *geen* reactie op zwavelzuur, zuringzuur ¹⁾, en evenmin op zoutzuur en salpeterzuur (het geoxydeerde water wordt dan eerst ontleed met *kaliumpermanganaat* $Mn O_4 K$, in bijzijn van zwavelzuur; volgt de reactie met diphenylamine, $NH. 2 C_6 H_5$, in zwavelzuur opgelost).

Tweede proef, met betrekking tot zilverbioxyde tegenover geoxydeerd water (zuiver, zie boven). Dezelfde weg werd gevolgd (zie vroeger), alleen is het geoxydeerde water, waarvan men zich bediende, te beschouwen te zijn zuiver; de concentratie zijnde ongeveer 30 vol. p.c. (zie boven). De bewerking met geoxydeerd water werd vele malen *herhaald* met hetzelfde zilverbioxyde, om de reactie des te beter te kunnen nagaan, lettende op de *neven-reacties*, die wellicht intreden (de reageerbuis werd, na iedere behandeling met $H_2 O_2$, geplaatst onder een *vacuum-exsiccator*, welke laatste bewerking wordt herhaald tot het gewicht constant is).

Eerste behandeling. Er werd uitgegaan van 0.4224 gr. zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$), afgeleid van peroxy-zwavelzuur zilver ($5 Ag_2 O_2 2 SO_7 Ag_2$). Er werd toegevoegd aan water 10 c. c., en daarna 4.5 c. c. der waterige oplossing van $H_2 O_2$ (zie boven). Met opbruising komt zuurstof vrij (een trechttertje, toegesmolten, was geplaatst op de reageerbuis gedurende de reactie); na inwerking werd het geheel geplaatst onder een *vacuum-exsiccator*. Het terugblijvende, dat bedroeg 0.4162 gr., maakt alzoo een verschil met de oorspronkelijke hoeveelheid van: $0.4224 \text{ gr.} - 0.4162 \text{ gr.} = 0.0062 \text{ gr.}$, dat geen te veronachtzamen hoeveelheid is. Maar 0.4224 gr. zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) bevat 0.0545 gr. zuurstof (te weten de geheele hoeveelheid), zoodat genoemd verschil daarvan slechts een betrekkelijk klein gedeelte uitmaakt (zie pag. 29). Teneinde zich evenwel niet te laten leiden door een twijfelachtige gevolgtrekking, werd

¹⁾ Zie: J. of the Chem. Sol. Vol. 79 and 80. Nov. (1901), pag. 622.

de bewerking herhaald met dezelfde hoeveelheid stof, en onder zooveel mogelijk gelijke omstandigheden.

Tweede behandeling. Het eenige onderscheid bestond daarin, dat men het geoxydeerde water liet vallen in de buis (met hetzelfde zilverbioxyde van boven, en 10 c. c. water) op een meer regelmatige wijze, en wel door gebruik te maken van een trechtertje met afleidingsbuis en *kraan*, bevattende het geoxydeerde water, nogmaals verdund met water voor het doel.

Na verdampen bleef terug 0.4124 gr. stof, dat met 0.4162 gr. (zie boven) een verschil maakt van $0.4162 \text{ gr.} - 0.4124 \text{ gr.} = 0.0038 \text{ gr.}$

Derde behandeling. Het gewichtsverlies bedroeg nog minder, en wel 0.0024 gr.

Vierde behandeling. Ditmaal was het verlies 0.0026 gr.

Bij gevolg bedroeg het verlies achtereenvolgens:

1	2.	3.	4.
0.0062 gr.	0.0038 gr.	0.0024 gr.	0.0026 gr.

Het schijnt, dat het verschil geen 0 (ongeveer) zal bereiken, anders zou men de proef hebben vervolgd. Maar er was reden, een weinig te twijfelen aan de noodige zuiverheid van het zilverbioxyde ($\text{Ag}_2 \text{O}_2$) (zie pag. 29); en daarom werd een overeenkomstige reeks verricht met een bioxyde ($\text{Ag}_2 \text{O}_2$) zoo goed als zeker voldoende zuiver, daar het was afgeleid van peroxy-salpeterzuur zilver.

Derde proef met zilverbioxyde tegenover geoxydeerd water (zuiver, zie pag. 30). Het bioxyde was bereid met peroxy-salpeterzuur zilver ($3 \text{ Ag}_2 \text{O}_2 \cdot \text{NO}_5 \text{ Ag}$), zooals reeds gezegd.

Eerste behandeling. Bij 0.5087 gr. zilverbioxyde werd gevoegd 10 c. c. water, en vervolgens 5 c. c. geoxydeerd water (te beschouwen als te zijn zuiver). De reactie geschiedde onder opbruising. Na gestaan te hebben onder een vacuum-exsiccator, bleef terug 0.5044 gr., zoodat zich een verschil voordoet van $0.5087 \text{ gr.} - 0.5044 \text{ gr.} = 0.0043 \text{ gr.}$, dus een niet te veronachtzamen hoeveelheid. Daarvan zou trouwens eenige onzuiverheid de aanleiding kunnen zijn, door een secundaire reactie te veroorzaken. Met 't oog op hetgeen zou kunnen geschieden, werd de behandeling herhaald, en wel eenige malen (zie later), daar de onzuiverheid meer of min zou kunnen verwijderd worden (verondersteld, dat zij aanwezig was).

Tweede behandeling. Bij de massa in de buis werd 10 c. c. water gedaan, en daarna 5 c. c. geoxydeerd water, als boven. Na geplaatst geweest te zijn onder een vacuum-exsiccator bleef 0.504 gr. stof

terug; het verlies bedroeg bijgevolg: 0.5044 gr. — 0.504 gr. = 0.0004 gr., anders gezegd, het gewicht aan zilverbioxyde bleef ongeveer hetzelfde. Ook is dit geringe verschil te veronachtzamen met 't oog op de analyse van het geoxydeerde water, waaruit volgt, dat de zuiverheid niet volkomen is, alhoewel zeer voldoende.

Derde behandeling. Denzelfden weg volgende, werd met de vorige bewerking een verschil gevonden van 0.0008 gr., namelijk in verlies aan gewicht. Het geoxydeerde water werd er bijgevoegd op een wijze, die meer regelmatigheid toeliet, zooals dit reeds vroeger nu en dan geschiedde (zie pag. 31).

Vierde behandeling. Het verlies bedroeg ditmaal 0.0018 gr.

Vijfde behandeling. Er deed zich een vermeerdering voor van 0.0002 gr., dat zoo goed als van geen beteekenis is.

Laten we daar, de vermeerdering na de eerste behandeling, die veeleer abnormaal toeschijnt, dan heeft men: 0.0004 gr. + 0.0008 gr. + 0.0018 gr. — 0.0002 = 0.0028 gr. (alles te zamen is 0.0028 gr. + 0.0043 gr. = 0.0071 gr.), dat niet veel beteekent.

Besluit wat betreft de verhouding van zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) tegenover geoxydeerd water ($H_2 O_2$). Uit het medegedeelde zou kunnen afgeleid worden, dat ontleding van zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$), als deze zich voordoet, in zeer geringe mate optreedt, wanneer met genoegzaam zuiver zilverbioxyde wordt gewerkt, en dan zoo ongeveer tot nul te herleiden, te weten met zilverbioxyde afgeleid van peroxy-salpeterzuur zilver ($3 Ag_2 O_2 \cdot NO_5 Ag$), klaarblijkelijk het meest zuivere der verschillende bereidingen van dit bioxyde (het andere was verkregen met peroxy-zwavelzuur zilver: $5 Ag_2 O_2 \cdot 2 SO_7 Ag_2$). Aangezien de omstandigheden bij de reactie wel kunnen gerekend worden dezelfde te zijn, schijnen de verschillen tusschen het gewicht aan bioxyde vóór en na behandeling, eerder te moeten verklaard worden, door verwijdering meer of min van geringe onzuiverheden, die overigens ten deele schijnen te blijven, en vandaar wellicht die onregelmatigheden, alhoewel op kleine schaal. Bij gevolg zou het besluit kunnen wezen, dat waterstofsuperoxyde ($H_2 O_2$) en zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) niet op elkander reageeren op de wijze vroeger aangegeven (pag. 28), verondersteld, dat beiden zuiver zijn; want, om aan te nemen, dat het aangewende bioxyde van zilver eenig merkbaar verschil zou aanbieden, vermag slechts een gewaande veronderstelling te wezen zonder argument van eenige waarde.

Zilveroxyde ($Ag_2 O$) langs den drogen weg gemaakt, tegenover geoxydeerd water (te beschouwen als zuiver, zie pag. 30). De wijze van werken was dezelfde, behoudens het verschil in oxyde.

Eerste behandeling. Het zilveroxyde ($Ag_2 O$) was gemaakt langs den drogen weg, namelijk door verhitting van koolzuur zilver ($CO_3 Ag_2$), bij ongeveer 196° , in een stroom van zuivere lucht. Het oxyde was genoegzaam scheikundig zuiver, en bevatte slechts sporen koolzuur zilver (daaruit volgende, dat de opbrengst bij verschillende bereidingen bedroeg 84—84.3 pct. aan oxyde, namelijk van 100 d. koolzuur zilver, terwijl de theorie vordert 84 pct. oxyde).

Bij 0.4058 gr. zilveroxyde (zich bevindende in een groote reageerbuis, enz.; zie vroeger) werd 10 c. c. water gedaan, en daarna 5 c. c. geoxydeerd water (te beschouwen als zuiver te zijn). Na de reactie, geplaatst onder een vacuum-exsiccator, bleef 0.4057 gr. terug, zoodat het gewichtsverlies slechts bedroeg 0.4058 gr. — 0.4057 gr. = 0.0001 gr. Het gewicht is bijgevolg ongeveer hetzelfde gebleven, en dat niettegenstaande de zuurstof vrijkwam onder *opbruising*, zoodat de scheikundige reactie, die zich als van zelve deed veronderstellen, wel niet is aan te nemen. Bijgevolg is de volgende reactie te beschouwen als onaannemelijk:



Dit besluit geldt in de eerste plaats van *zuiver* zilveroxyde ($Ag_2 O$), en in de tweede plaats van dit oxyde langs den drogen weg gemaakt (zie vroeger), en afgeleid van koolzuur zilver door verhitten. Want er moet worden nagegaan, of dit oxyde gemaakt langs den natten weg (namelijk door praecipitatie) zich evenzoo verhoudt (zie later).

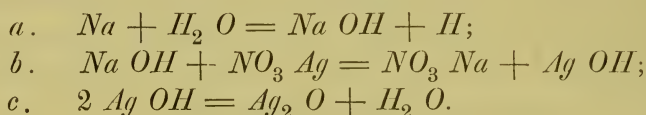
Tweede behandeling. Dezelfde bewerkingen herhaald op gelijke wijze, gaven genoegzaam eenzelfde uitkomst, alleen had een vermeerdering plaats van 0.0001 gr., dat van geen noemenswaardige beteekenis is, want zulk een verschil kan zich altijd voordoen, vooral werkende onder omstandigheden van gewonen aard zonder bijzondere voorzorgsmaatregelen; ook is niet te vergeten, dat het geoxydeerde water, alhoewel betrekkelijk zeer zuiver, toch niet volstrekt zuiver is (zie vroeger).

Derde behandeling. Opnieuw werd verkregen een vermeerdering van 0.0001 gr. Er werd gebruik gemaakt van den kleinen trechter met buis en kraan (zie vroeger), met het doel, om de snelheid der reactie behoorlijk te kunnen regelen (op de wijze, als dit reeds vroeger bij vele proeven geschiedde).

Vierde behandeling. Ditmaal een vermeerdering van 0.0002 gr., dus evenmin een noemenswaardige hoeveelheid.

Besluit. Het is bijgevolg, dat het zilveroxyde ($Ag_2 O$) *langs drogen weg* gemaakt, slechts katalytisch werkt, zooals ook zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) schijnt (ten minste, te kunnen doen) te doen, waarmede men alleen wil te kennen geven, dat dit de uitkomst is der reactie (in zooverre als deze oxyden hetzelfde zijn *gebleven*, na reactie).

Zilveroxyde ($Ag_2 O$) langs den natten weg gemaakt, tegenover geoxydeerd water (als zuiver te beschouwen zie pag. 30). De omstandigheden werden zoo gunstig mogelijk genomen, om een scheikundige reactie mogelijk te maken, zooals weldra zal blijken. In een groote reageerbuis (voorzien van een kleinen toegesmolten trechter, als naar gewoonte) werd gedaan 10 c. c. water, daarna 0.0943 gr. natrium, en vervolgens werd er aan toegevoegd 0.9279 gr. zilvernitraat ($NO_3 Ag$). De volgende reacties hebben plaats:



Bij dezen inhoud nu werd gedaan 5 c. c. *geoxydeerd water* (te beschouwen zuiver te zijn). Nadat de reactie was afgelopen, werd het geheel geplaatst onder een vacuum-exsiccator (de reactie verliep ook hier onstuimig), en deze laatste bewerking herhaald, tot het gewicht niet meer veranderde (zooals dit trouwens bij vorige proeven plaats vond, en bij volgende), *dat*, vooral in het geval dat ons bezig houdt, *veel tijd vereischte*.

Verondersteld, dat er geen chemische reacties intreden met het zilveroxyde ($Ag_2 O$), zoo moet het terugblijvende, namelijk na verdamping, bestaan uit een mengsel van zilveroxyde ($Ag_2 O$), natriumnitraat ($NO_3 Na$), en zilvernitraat ($NO_3 Ag$), welk laatste in *overmaat* aanwezig was.

De hoeveelheid *natrium* en zilvernitraat ($NO_3 Ag$), waarvan werd uitgegaan (zie boven) geeft door *berekening* de volgende verhouding dezer drie lichamen:

zilveroxyde ($Ag_2 O$)	0.4741 gr.
natriumnitraat ($NO_3 Na$)	0.3482
zilvernitraat ($NO_3 Ag$) (onveranderd gebleven)	0.2325

som 1.0548 gr.

De waarde 0.2325 gr. (zie boven) voor zilvernitraat (onveranderd gebleven) wordt aldus gevonden. Er was uitgegaan van 0.9279 gr. zilvernitraat, en door berekening wordt gevonden, dat hiervan is ontleed (onder den invloed van het natriumhydroxyde, $NaOH$; zie boven) 0.6954 gr., en bij gevolg *blijft terug* van dit zilvernitraat: 0.9279 gr. — 0.6954 gr. = 0.2325 gr., gelijk zich boven bevindt.

Het gewicht van het terugblijvende bedroeg evenwel 1.0567 gr., zoodat zich het verschil voordoet van 1.0567 gr. — 0.0548 gr. = 0.0019 gr., zijnde dit vermeerdering in gewicht. Bijgevolg bestaat er wel geen aanleiding, om eenige chemische reactie aan te nemen, maar slechts een katalytische reactie (dat wil zeggen, dat de som van gevormd en ontleed worden van zilveroxyde = 0 is). Voegen we hieraan toe, dat de hoeveelheid aan gemaakt zilveroxyde, zijnde die 0.4741 gr. (zie boven), vertegenwoordigt 0.0327 gr. aan zuurstof. Maar, zooals gezegd, had er zelfs geen vermindering plaats in gewicht, maar integendeel een kleine toename.

Contrôle-proef. Ook met 't oog op het verschil alhoewel gering (zie boven, zijnde dat van 0.0019 gr.) werd een contrôle-proef gedaan, daarin bestaande, dat alle stoffen aanwezig waren behalve geoxydeerd water (H_2O_2), terwijl overigens op dezelfde wijze werd te werk gegaan. Aanvankelijk werden bij elkander gedaan 0.101 gr. natrium en 5 c. c. water, en vervolgens daar bijgedaan: zilvernitraat 0.9843 gr. Het geheel werd vervolgens geplaatst onder een vacuum-exsiccator, waarbij terugbleef 1.1235 gr. De theorie eischt (zie vroeger):

zilveroxyde (Ag_2O)	0.5078 gr.
natriumnitraat (NO_3Na)	0.3727
zilvernitraat (NO_3Ag)	5.2404
<hr/>	
som	1.1209 gr.
<hr/>	

Er werd gevonden 1.1235 gr., bijgevolg doet zich een verschil voor van 1.1235 gr. — 1.1209 gr. = 0.0026 gr., en wel *vermeerdering*, zooals in de proef als zoodanig aanvankelijk vermeld (het verschil bedraagt in dat geval 0.0019 gr.). Het besluit is bijgevolg nog, en nu met meer recht dan vroeger, dat er waarschijnlijk geen chemische reactie plaats heeft (te nemen in den zin boven gegeven), maar alleen een katalytische reactie (zie boven), bij aanwezigheid van geoxydeerd water (H_2O_2), tusschen dit lichaam en zilveroxyde

($Ag_2 O$), waarbij dit laatste kan geacht worden *onveranderd* te blijven.

Koolzuur zilver ($CO Ag_2$) *tegenover geoxydeerd water* (te beschouwen als zuiver, zie pag. 30).

Eerste behandeling. De weg gevolgd is in den grond dezelfde. Er werd uitgegaan van 0.4613 gr. koolzuur zilver, waarbij gedaan werd 10 c. c. water, en daarna 5 c.c. geoxydeerd water (als zuiver te beschouwen). Zuurstof komt vrij onder opbruising, gelijk het geval was bij de voorgaande reacties. Vervolgens geplaatst onder een vacuüm-exsiccator, bleef terug 0.4461 gr., zoodat een verlies intrad van $0.4613 \text{ gr.} - 0.4461 \text{ gr.} = 0.0152 \text{ gr.}$ Het grootste deel hiervan of alles, zou een gevolg kunnen zijn eener gedeeltelijke ontleding van koolzuur zilver, zij dit in den zin, die hier volgt:



daar de massa, zoodra als de reactie is begonnen, een *zwarte* kleur vertoont (bijgevolg onder den invloed van geoxydeerd water).

V. Baeyer (l.c.) deed reeds een overeenkomstig feit kennen, betrekking hebbende op het neêrslag gevormd door een oplossing van een zilverzout en een koolzuur zout, dus op koolzuur zilver, waarbij dan werd gedaan geoxydeerd water.

Tweede behandeling. Geschiedde op gelijke wijze, alleen werd geoxydeerd water langzamer bijgedaan (omdat de reactie zoo onstuiming verliep), door op de reageerbuis te zetten een trechterbuis met kraan. Het verlies bedroeg ditmaal 0.0036 gr., bijgevolg aanmerkelijk minder.

Na de eerste reactie was nog koolzuur zilver te zien; maar na de tweede behandeling was de geheele massa zwart van kleur.

Derde behandeling (zie boven). Het verlies bedroeg 0.0025 gr.

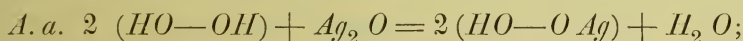
Vierde behandeling. Het verlies was nog wat geringer, zijnde 0.002 gr.

Besluit. Het gewichtsverlies is wel dááaraan toe te schrijven, dat *kooldioxyde* is vrijgekomen (men heeft: $CO_3 Ag_2 = CO_2 + Ag_2 O$), wel te verstaan onder den invloed van geoxydeerd water ($H_2 O_2$); overigens zonder invloed direct, op het zilveroxyde, wat de samenstelling betreft. Een volledige ontleding van het koolzuur zilver ($CO_3 Ag_2$) had *niet* plaats, want dan zou 0.073 gr. kooldioxyde moeten vrijkomen, namelijk op 0.4613 gr. koolzuur zilver (zie boven). De som der verliezen bij de vier behandelingen met geoxydeerd water, namelijk van $0.0152 \text{ gr.} + 0.0036 \text{ gr.} + 0.0025 \text{ gr.} + 0.002 \text{ gr.} = 0.0233 \text{ gr.}$, is nog niet het derde gedeelte (zijnde

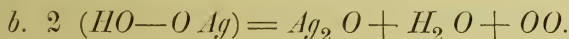
$\frac{0.073}{3}$ gr. = 0.026 gr. van het geheel (zie boven). Het wil voorkomen, alsof het verlies met iedere behandeling geringer werd, bijgevolg schijnt de grootste hoeveelheid koolzuur zilver onaangetast te blijven. De gegevens, waarom het hier te doen is, maken het alzoo nog waarschijnlijker, dat hier optreedt de *katalytische* werking van zilveroxyde ($Ag_2 O$), en derhalve een herleid worden daarvan minder waarschijnlijk. Tot dit besluit leiden ook de proeven met zilveroxyde ($Ag_2 O$) als zoodanig (zie vroeger), terwijl de snelheid van ontleding van geoxydeerd water ($H_2 O_2$) wel ongeveer eenzelfde is voor *zilveroxyde* en *koolzuur zilver*, in beide gevallen onder opbruising.

$H_2 O_2$ als zuur.

Men zou zich kunnen voorstellen, dat waterstoffbioxyde, $HO—OH$, het hydroxyde is van een zuur $(HO)—OH$, zijnde een der twee OH het eigenlijk gezegde hydroxyde, en het andere (OH) de rest van het zuur, namelijk, van het *zuurstof-zuur*, welk zuur kan vormen met zilveroxyde ($Ag_2 O$) het zilverzout (A):



Het *koolzuur* zilver zou bij gevolg aanleiding geven tot de volgende reacties, die in hoofdzaak op hetzelfde neêrkomen:



Deze vrije zuurstof (zie A), men ziet het gemakkelijk in, stamt af, of van geoxydeerd water of van zilveroxyde ($Ag_2 O$), maar veeleer van het eerste lichaam (namelijk van $HO—OH$).

Wat betreft de reacties gegeven, deze kunnen alleen strekken, om zich eenig denkbeeld te vormen der *katalytische* werking, die in den grond zal terug te brengen zijn (zie vroeger) tot scheikundige reacties.

Salpeterzuur zilver ($NO_3 Ag$) tegenover geoxydeerd water (als zuiver te beschouwen, zie pag. 30). Bij een hoeveelheid van 0.4715 gr. salpeterzuur zilver ($NO_3 Ag$) werd gedaan 10 c. c. water, en daarna 5 c. c. *geoxydeerd water* (te beschouwen als zuiver, zie boven). Slechts kwamen vrij uiterst kleine gasbelletjes en niet in groote hoeveelheid, op 't oog te oordeelen. Als bij vorige gevallen werd de buis gezet in een vacuum-exsiccator, maar toen was de ontleding van geoxydeerd water heel wat duidelijker. Er bleef aan stof terug 0.4717 gr. Het verschil $0.4717 \text{ gr.} - 0.4715 \text{ gr.} = 0.0002 \text{ gr.}$

bezit tevens geen noemenswaardige grootte, en bij gevolg is het besluit gewettigd, dat in gemeld geval geen bepaalde reactie optreedt.

Zoogenaamd peroxy-salpeterzuur zilver tegenover geoxydeerd water (beschouwd als zuiver, zie pag. 30).

Eerste behandeling. Bij een hoeveelheid van 0.4367 gr. van genoemde verbinding, gedaan in een reageerbuis (zie de vorige proeven) werd gevoegd 5 c. c. water, en vervolgens 5 c. c. geoxydeerd water. Zuurstof kwam vrij, en den volgenden dag werd de buis gezet in een vacuum-exsiccator, geheel als vroeger. Er bleef terug 0.4333 gr., zoodat er een gewichts-verlies was van 0.4367 gr. — 0.4333 gr. = 0.0034 gr.

Tweede behandeling. Met een nieuwe hoeveelheid geoxydeerd water (na vooraf water te hebben toegevoegd, enz.) bedroeg het verlies 0.002 gr.

Contrôle-proef. Eerste behandeling. Alles hetzelfde zijnde, maar zonder geoxydeerd water (overigens met een andere hoeveelheid der zilver-verbinding). Een hoeveelheid van 0.4789 gr. liet terug 0.4791 gr., bijgevolg had een *vermeerdering* plaats van 0.0002 gr.

Tweede behandeling. Een vermeerdering van 0.0001 gr. dus evenzoo niet noemenswaardig.

Een nieuwe reactie op zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$). Bekend zijn de reacties op zilverbioxyde, die neêrkomen op de oplosbaarheid in zwavelzuur (sterk), namelijk met *bruine* kleur, welke zelfde eigenschap zich voordoet tegenover *salpeterzuur* (tevens sterk). Maar een meer sprekende reactie is die met diphenylamine ($NH. 2 C_6 H_5$), opgelost in zwavelzuur (sterk), bij toevoegen eener oplossing van zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) in zwavelzuur (sterk). Ook kan het zilverbioxyde als zoodanig (*niet* opgelost) gedaan worden bij de oplossing van diphenylamine, maar de blauwe kleur treedt netter op, als men te werk gaat als gezegd, in welk geval de reactie wel ook gevoeliger is.

Over het bestendigen der verkleuring van diphenylamine bij oxydatie. Bij wijze van voorbeeld is genomen *geoxydeerd water* (beschouwd als zuiver, zie pag. 30) als oxydatie-middel, uitgaande van een oplossing van 0.1 gr. diphenylamine in 10 gr. zwavelzuur (sterk), aangeduid door *a*, en van een andere oplossing, gelijkelijk gemaakt, alleen bijgevoegd 0.24 gr. water, aangeduid met *b*. De toevoeging van water geschiedde met 't oog op eenige voorschriften ¹⁾

¹⁾ Zie: Laar. Ber. D. Ch. Ges. J. 15 S. 2086 (1882); Fresenius: Anal. Qual. Ch. S. 32 (1895).

dienaangaande gegeven. Overigens is de gevolgde weg aangegeven met de letters *A*, *B*, enz., om verwarring te voorkomen, en eenige verkregen uitkomsten beter te doen uitkomen.

A. Veelal is men gewoon, op een *horlogeglas* wat te doen van een oplossing van diphenylamine (in meer of min sterk zwavelzuur), en er daarna bij te voegen van de te onderzoeken vloeistof, bevattende b.v. *geoxydeerd water*. Ook alzoo werd aangevangen, dat ongeveer *twee uur* vereischt, alvorens het maximum van blauwe verkleuring intreedt, wat intensiteit betreft (uitgaande van oplossing *a* of *b*), na toevoeging van 3 druppels geoxydeerd water (beschouwd als zuiver, zie pag. 30) verdund met ongeveer 10-maal zijn volumen *water*. Deze *blauwe* verkleuring wordt na eenigen tijd *groen*, daarna *bruin*, voor welke omzettingen eenige uren worden vereischt. Maar wanneer bij de massa na te zijn bruin geworden, *zwavelzuur* (geconcentreerd) wordt gedaan, dan komt de *groene* kleur weder te voorschijn, om ten slotte weder *bruin* te worden (bij staan aan de vochtige lucht). Door er nogmaals *zwavelzuur* bij te doen, kwam er nog wel een *groene* kleur opdagen, maar uiterst zwak van toon.

B. Wordt het *lichaam* in *blauwe* oplossing, aanvankelijk gevormd (zie *A*), gedaan in *water* (wel te verstaan in groote overmaat), dan ontstaat, ten minste *schijnbaar*, een *kleurloze* oplossing, die weldra een *bruine* kleur aanneemt. Het lichaam in kwestie bevindt zich dan waarschijnlijk meer of min (dit hangt af van de hoeveelheid water) in *suspensie*, en ten deele in oplossing. Wordt van een *bruin* afzetsel ontstaan, gedaan in *zwavelzuur* (sterk), dan wordt dit opgelost met *bruin-violette* kleur, soms meer naderende tot *blauw-violet*, en andere tinten dezer soort, namelijk tusschen *blauw* en *bruin*. Ook vermag de zoogenaamde bruine oplossing (zie boven) zulk een blauwachtige verkleuring te geven met (sterk) zwavelzuur in overmaat. Deze laatste bewerking wordt steeds gedaan onder afkoeling (namelijk met water), om een te groote verhooging van temperatuur te voorkomen.

C. Voortaan zal een *reageerbuis* de plaats innemen van een horlogeglas, welke reageerbuis wordt voorzien van een kleinen toegesmolten trechter, en dat om verschillende redenen (vochtigheid der lucht, stof enz.). Er werd gewerkt met oplossing (*a*) en (*b*) (zie vroeger). Om te maken, dat de *blauwe* verkleuring optreedt in haar maximum van intensiteit en door de geheele massa (verondersteld, dat de massa niet wordt geschud), wordt ook ongeveer twee uren gevorderd (zie *A*), terwijl bijna onder dezelfde omstandigheden werd gewerkt; overigens werd uitgegaan van 1 gr. der oplossing

van diphenylamine (zie in den aanvang van dit hoofdstuk). Den volgenden dag was de *blauwe* kleur *groen* geworden, om in *bruin* over te gaan, welke omzettingen betrekkelijk veel tijd vereischten (hetzij, dat men stil liet staan, of van tijd tot tijd schudde). In de eerste phase zou men somtijds geneigd zijn, het er voor te houden, dat de *blauwe* verkleuring wordt bevorderd (om niet meer te zeggen) door tusschenkomst van zuurstof der lucht, daar deze zich betrekkelijk meer begint te vertoonen aan de oppervlakte der oplossing (in rust gelaten).

D. Dezelfde weg werd gevolgd, maar na de eerste phase van verkleuring, als namelijk de *blauwe* verkleuring is ingetreden (en wel met haar maximum in intensiteit, den eersten dag ontstaan in ongeveer twee uur), werd *zwavelzuur* (sterk) toegevoegd in overmaat, bij de *blauwe* oplossing. Het is onder deze omstandigheden, dat de *blauwe* verkleuring langer *standhoudt*, namelijk *eenige dagen*, alvorens de *groene* kleur zich vertoont. Bij gevolg zou men geneigd kunnen zijn, daaruit te besluiten, dat aanwezigheid van *water* een rol vervult met betrekking tot de stabiliteit van het lichaam met *blauwe* kleur gevormd. En dat, niettegenstaande in den aanvang der reactie, de aanwezigheid van water den indruk geeft van veeleer deze te bevorderen, namelijk de vorming der *blauwe* stof (zie het eerste gedeelte met betrekking tot de Litteratuur van ons onderwerp), dat overigens nog is te vervolgen.

E. In gezegde richting wilde men een stap voorwaarts doen, door gebruik te maken van *rookend* zwavelzuur (inplaats van gewoon zwavelzuur) bij de *blauwe* oplossing (als het maximum van intensiteit ongeveer is bereikt, dat door ondervinding zoo ongeveer kan blijken, zij dit na *twee uren* der reactie, gedaan onder omstandigheden vroeger medegedeeld, zie het begin van dit artikel en hetgeen volgt). De *blauwe* kleur wordt dan veeleer *blauw-violet*.

F. Men wijzigde de omstandigheden onder E meer of min, te weten met *rookend* zwavelzuur. Zoo werd geoxydeerd water (namelijk het zuivere zoogenaamd, zie pag. 30) gedaan bij *gewoon* zwavelzuur, zij dit een druppel van het eerste bij 1 gr. van het andere lichaam (*rookend* zwavelzuur zou hier minder geschikt zijn, in aanmerking genomen de hevigheid der plaats hebbende reactie). Bij deze oplossing nu wordt *rookend* zwavelzuur gedaan (zij dit ongeveer 5 gr.), en (1 gr.) eener oplossing van *diphenylamine* in *rookend* zwavelzuur (zij dit 0.1 gr. in 10 gr. van dit zuur). Onder deze omstandigheden, wordt de massa *schoon violet* gekleurd met groote intensiteit (wordt niet meer dan 1 druppel genomen dezer oplossing van amine, dan treedt slechts een zwakke verkleuring op).

G. Een andere wijziging van hetgeen onder *F* voorkomt, was, dat bij 1.3 gr. van een oplossing van amine in gewoon zwavelzuur (zij dit 0.1 gr. in 10 c. c. van dit zuur), werd gedaan 1 druppel geoxydeerd water (zie vroeger), en daarbij 5 gr. *rookend* zwavelzuur (als gezegd in een *reageerbuis*, met een kleinen trechter, toegesmolten; zie vroeger). Er treedt dan een schoon *violette* kleur te voorschijn, die van alle verkleuringen, boven vermeld, zich het langst staande houdt (wat betreft het aantal *dagen*).

Over de structuur-formule van zoogenaamd peroxy-salpeterzuur zilver'. In een arbeid onlangs verschenen, wordt door Tanatar ²⁾ dezelfde molecuulair-formule, te weten $Ag_7 NO_{11}$ gegeven, die reeds vroeger was aangenomen, maar hij geeft de voorkeur aan een andere *structuur-formule*, namelijk die van $2 Ag_3 O_4 \cdot NAg O_3$, in plaats van $3 Ag_2 O_2 \cdot NAg O_5$, vroeger als meer waarschijnlijk aangegeven. In de eerste plaats wenschte men te doen uitkomen, wat deze opvatting betreft, dat de formule van structuur $3 Ag_2 O_2 \cdot NAg O_5$ meer schijnt te beantwoorden aan de *feiten* dan de andere formule. Aangezien de argumenten voor beide formules breedvoerig zijn behandeld ³⁾, zou men die thans slechts kunnen herhalen, dat wel overtuigend is. Tanatar grondt zijn argumenten vooral op een verbinding $Ag_7 FO_8$ volgens hem gemaakt door electrolyse van fluoorzilver (*F Ag*) in waterige oplossing (waarvan de studie evenwel nog niet is afgesloten), en op de veronderstelling, dat van *Fluoor* en *zuurstof* wel geen verbinding zal bestaan. Gezegde verbinding $Ag_7 FO_8$, zou bij gevolg tot structuur hebben $2 Ag_3 O_4 \cdot F Ag$, in plaats van $3 Ag_2 O_2 \cdot F Ag O_2$. Maar anderzijds *twijfelt men gansch niet aan het bestaan*, onder genoemde omstandigheden, van een verbinding van *Fluoor* met *zuurstof*, daar deze in dit geval zeer gunstig schijnen te zijn, als gevolg van het zilverbioxyde $Ag_2 O_2$, dat het evenwicht staande kan houden door zijn karakter en zijn massa, met $F Ag O_2$. Hetgeen in deze Verhandeling voorkomt (zie vroeger) betrekkelijk de wijze, waarop geoxydeerd water ($H_2 O_2$) zich verhoudt tegenover zilveroxyde ($Ag_2 O$), (zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$), eenige zilverzouten, en daarenboven *peroxy-salpeterzuur zilver*, doet in het geheel niet denken aan het bestaan eener verbinding $Ag_3 O_4$. Dit oxyde, zijnde $Ag_3 O_4 = Ag_2 O_2 + Ag O_2$, zou ook in zich sluiten, zij het op indirecte wijze, het bestaan van een zilversuperoxyde $Ag O_2$, tot nogtoe onbekend. Geoxydeerd water

¹⁾ Zie de Verhandelingen over dit onderwerp in het „Recueil”

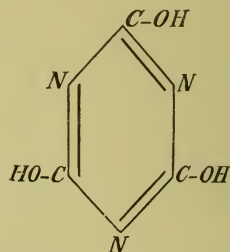
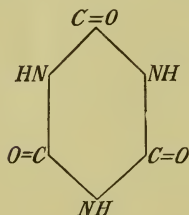
²⁾ J. of the Chem. Soc. Vol. 81 and 82 Febr. 1902, Abstr. II. pag. 73.

³⁾ Dit „Recueil”, Tom. XV. pag. 279 (1899).

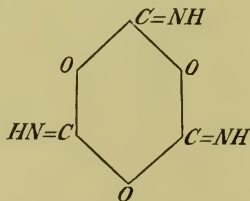
verhoudt zich ook tegenover *peroxy-salpeterzuur zilver* ongeveer als zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$).

A A N H A N G S E L.

Over de structuurformule van Cyamelid. Iedere structuurformule voor cyamelid schijnt tot hertoe te zijn mislukt, aldus op te vatten, dat men tot nogtoe niet is mogen slagen, een formule voor te stellen, die genoegzaam, ten minste oogenschijnlijk, beantwoordt aan de eigenschappen van dit lichaam. Onderzoekingen ¹⁾ nog onlangs gedaan, hebben daarin geen wijziging kunnen brengen. Onder zulke omstandigheden komt het voor, niet overbodig te zijn, in herinnering te brengen, hetgeen betreffende dit onderwerp voor eenige jaren ²⁾ is gezegd. Genoemde kwestie staat in een innig verband met de structuur der *cyanuurzuren*, zooals bekend, en bij gevolg met de *cyaanzuren*. Ter dezer plaatse vestigt men slechts de aandacht op één structuurformule (zie de oorspronkelijke Mededeeling over andere dergelijke formules voor Cyamelid), die men zou kunnen aannemen behalve de polymereen (der *cyaanzuren* $OC=NH$ en $HO-CN$), namelijk die van $3 OC=3 NH$ en $3 HO. 3 CN$, of wat hetzelfde is:



nevens andere formules (zie het oorspronkelijke) die van $3 O. 3 C NH$, of wat hetzelfde is:



welke structuur vrij wel schijnt te beantwoorden aan de eigenschappen van Cyamelid, waarvan overigens het moleculair-gewicht

¹⁾ Zie: Chattaway en Wadmore: J. Ch. Soc. Vol. 81 and 82, pag. 191. March, 1902; l.c. Senier en Walsh, pag. 290, April, 1902.

²⁾ Dit Recueil. Tom. VI. pag. 199.

nog is te bepalen (zie voormelde Litt., voor zooverre betreft de oplosbaarheid van het lichaam in water). Het kan duidelijk wezen, hoe een lichaam der structuur $3 O. 3 NH$ gemakkelijk zal zijn om te zetten in een verbinding der structuur $3 OC. 3 NH$ (en $3 HO, 3 CN$), en *wederkeerig*. Een dusdanige polymerisatie ontmoet men, als bekend (te weten in het geval, dat ons bezighoudt), b. v. bij aldehyden, maar ook bij ketonzuren, zooals ten minste waarschijnlijk is (zie onze Verhandelingen, vroeger in het Recueil, over brandigdruivenzuur, enz.). De omzetting b.v. van $OC = NH$ in den polymeer $3 O. 3 C NH$, zou dan geschieden door intermediair der verbinding $-O - C = NH$, die niet in vrijen staat zal kunnen optreden.

Over een gaslamp eener nieuwe constructie (genoemd reguleurlamp), met 't oog op een, bij hooge temperaturen, constant bad.

De geheele inrichting bestaat in een vereeniging van twee gas-regulateurs, ieder dezer geplaatst in een bad, zij deze *B* en *D* (gevuld voor het grootste gedeelte b.v. met kopervijlsel, fijn; beter zou wezen zilver, gekristalliseerd langs electrischen weg). *Bad B is bestemd voor het te verhitten lichaam*, terwijl bad *D* dient, om de temperatuur te regelen van den gas-reguleur voor hooge temperaturen; bad *D* wordt gehouden op een constante maar willekeurige temperatuur van b.v. 35° , door een gewonen gas-reguleur naar Bunsen, terwijl bad *D* een gedeelte bevat van den gas-reguleur voor hooge temperaturen (zie later). Lettende op de hooge temperaturen van bad *B*, die men wil hebben, zij deze tusschen 300° — 400° , kan men voor den gas-reguleur zich bedienen van een vat (b.v. van glas, platina, enz.) gevuld met zuivere lucht, van een inhoud van eenige c. c., waarmede is verbonden (door aansmelting) een buis met capillair lumen, maar betrekkelijk dik van glas. Deze buis is horizontaal omgebogen, vervolgens verticaal naar beneden, en ten derde male omgebogen, ditmaal horizontaal, eindelijk verticaal (*V*); zie later. Dit laatste gedeelte heeft een grooter lumen (het deel, dat verticaal naar beneden gaat, kan als een bolletje ergens zijn opgeblazen, om te dienen tot vat voor het kwik, bij bekoeling), en kwik in het horizontale deel beneden bevat.

Bad *B* bevat een thermometer voor hooge temperaturen, bad *D* een gewonen thermometer (namelijk van gewone constructie). Het deel der buis, dat kwik bevat, bevindt zich in bad *D*, zooals duidelijk is, terwijl het doel is, de lucht en het kwik (van dit deel der buis, vooral voor zooverre de lucht aangaat) te houden op een constante temperatuur (wel te verstaan in bad *D*). Het laatste

gedeelte der buis, dat verticaal is omgebogen (zie boven *V*), eindigt in den vorm van een *gewonen regulateur* van Bunsen. De temperatuur van bad *D* is *willekeurig* betrekkelijk, maar moet *constant* zijn, en zou b.v. kunnen zijn, als gezegd, die van 35° .

Bad *B* kan worden verhit op *verschillende* wijzen, b.v. 1° . door verwarming met *twee* gewone lampen; of 2° . door verhitting met *een en dezelfde lamp* van een bijzondere constructie.

1° . *Ingeval wordt verwarmd met twee lampen van gewone constructie.* Bad *B* wordt verhit met twee gaslampen, een waarin, zij deze *A*, is een genoegzaam *constante* bron van warmte, terwijl de tweede lamp, zij deze aangeduid met *C*, een warmtebron is, die altijd *verandert*, één geheel vormende met den regulateur voor *hooge temperaturen*. *Twee* bronnen van warmte zijn aan te bevelen (namelijk boven één bron van warmte), met 't oog op de *hooge* temperatuur, die *constant* is te houden, dat zoo ongeveer beteekent een betrekkelijk groot verlies aan *hoeveelheid* warmte (in de eenheid van tijd), welk verlies moet worden aangevuld. Een enkele lamp, met regulateur, zou wel zóó kunnen zijn, dat zich geen betrekkelijk groot verschil voordoet tusschen *maximum* en *minimum* der hoeveelheid warmte, en het verlies aan warmte in betrekkelijk weinig tijd zou te herstellen zijn (verondersteld, dat gezegde maximum-hoeveelheid de vereischte grens bereikt); maar het behoeft geen betoog, dat *twee* bronnen van warmte verder reiken, omdat de hoeveelheid warmte beter is te regelen. In de eerste plaats kunnen twee bronnen van warmte gemakkelijker meer warmte geven, en zal dientengevolge een *hooge* temperatuur beter constant te houden zijn, aangenomen, dat er een geschikte verhouding is tusschen deze twee bronnen van warmte (te weten, de bron die ongeveer *constant* is, en de tweede bron, met *regulateur* voor *hooge* temperatuur), wat betreft het maximum van de eene, en maximum en minimum van de andere bron (die met regulateur). Teneinde zich eenig denkbeeld te vormen van den weg, te volgen, om de verlangde temperatuur te bereiken, laten we beginnen met aan te bevelen, in de eerste plaats *bad B* meer of min te brengen op de verlangde temperatuur, maar het is fluidelijk *onder* deze, te regelen naar de gewone wel bekende manier. Tegelijkertijd volgt dan de verwarming met lamp *C*, welke laatste verbonden is *met den regulateur voor hooge temperatuur*, waarvan dan zoowel het *maximum* als *minimum* is te regelen. Dit alles moet gedaan worden vóór de eigentlijke proef. Onder bad *D* is evenzoo een lamp geplaatst (onder bad *B* bevinden zich *twee* lampen, zie boven), in gemeenschap zijnde met een *gewonen regulateur* naar Bunsen (hetgeen wil zeggen, dat deze alleen met kwik is gevuld),

welke reguleteur voor *gematigde temperatuur* (zij deze 35°) zich bevindt in bad *C*.

De lampen zijn voorzien van een dopje van *metaalgaas* (b.v. van *koper*), om het inslaan der vlammen te voorkomen, van een *wenschelijke structuur*, zoodat de vlam niet walmt, want dan zou het onmogelijk kunnen worden, de temperatuur constant te houden.

2°. *De reguleteur-lamp*. Deze bestaat in een vereeniging der twee lampen *A* en *C* (reeds boven gezegd pag. 44), bijgevolg een *enkele lamp* uitmakende. De constructie dezer lamp is een zoodanige, dat in een gaslamp naar Bunsen (noemen we de buis dezer lamp *L*; van het nieuwe model, namelijk met een schroef, teneinde de hoeveelheid gas te kunnen regelen) zich bevindt een *koperen buis*, zij deze aangegeven door *M*, aangebracht in het *kegelvormig* gedeelte der lamp (deze buis *M* is voorzien van een kraan, en deze kraan van een *hefboom*, om de hoeveelheid beter te kunnen regelen. Deze buis *M* staat in gemeenschap met de gasleiding, en zoo ook buis *L* der oorspronkelijke lamp, thans *omgezet in een lamp eener andere constructie* (als gevolg van het aanbrengen van buis *M*), geheeten *reguleteur-lamp*, bijgevolg gas ontvangende door twee buizen *L* en *M* (terwijl is verondersteld, dat het gas staat onder constanten druk, in geval het er meer nauwkeurig op aankomt), die *niet* in gemeenschap staan met de gewone gasleiding van het Laboratorium, maar een eigen gasmeter hebben.

Verwarming. Bad *B* (bestemd voor hooge temperaturen) is omgeven met dikke platen van asbest, behoudens een gedeelte van den bodem, om plaats te maken voor de vlam. Tusschen de baden *B* en *D* zijn minstens twee zeer dikke platen van asbest te plaatsen, de een op weinigen afstand van de andere, en der vereischte afmetingen, lettende op het groote verschil in temperatuur der twee baden. Overigens vangt men aan, bad *B* te verhitten met het gas door buis *L* van de reguleteur-lamp (zie boven), terwijl in denzelfden tijd (beter is het, dit nog vroeger te beginnen; terwijl wordt verondersteld, dat er een *nacht*-leiding ter beschikking is) bad *C* op zijn temperatuur wordt gebracht. Is de temperatuur van bad *B* *ongeveer* bereikt, dan wordt de reguleteur voor hooge temperaturen geregeld (deze bevindt zich in bad *C*; het luchtreservoir er van is in *B* geplaatst, zie pag. 43); en hetzelfde is gedaan met den tweeden reguleteur, voor een temperatuur zij deze van 35° ; zie vroeger (beter is, zooals reeds werd opgemerkt, dit te doen voorafgaan). Als dat alles is geordend, *dan wordt de kraan van buis M geopend* (zie boven), en regelt men de hooge temperatuur op de welbekende wijze. Bijgevolg heeft men bij de reguleteur-lamp

te doen met *twee* vlammen, die als één zijn geworden, waarvan de eene vlam *constant* is en de andere *veranderlijk*, gevoed door *twee verschillende* gasleidingsbuizen (maar, zooals duidelijk is, uitmondende in een en dezelfde breede gasleidingsbuis).

Een vacuum-batterij. De batterij is slechts *een accumulator van een gedeeltelijk luchtledig*, bestemd, dienst te doen b. v. in een scheikundig Laboratorium (terwijl de batterij b.v. is geplaatst in het souterrain). De batterij bevat *vele reservoirs* (in gemeenschap staande met de vacuum-pomp), het geheel voorzien van tal van *kranen*, ook *voor ieder reservoir in 't bijzonder*; terwijl de batterij dient, een gedeeltelijk luchtledig te maken in eenig willekeurig vat.

Constructie. De volgende beantwoordt vrij wel aan het gestelde doel (zie later), anders vatbaar voor vele wijzigingen. In beginsel bevat de batterij:

1° verscheiden glazen reservoirs;

2° ieder dezer reservoirs is voorzien van een *manometer*, en van een buis met een *kraan* (het geheel is van glas; maar zou ook kunnen zijn b.v. van koper);

3° ieder reservoir is geplaatst in een *houten kist*, die het omgeeft, met uitzondering van het bovengedeelte, waar zich een *manometer* bevindt, en daarenboven een buis, voorzien van een kraan.

Deze houten kist moet dienst doen in geval van ongeluk.

4°. *Ieder* dezer reservoirs staat in gemeenschap, door middel van een caoutchouc-buis (bevattende een metalen spiraal) met een *metalen* geleidingsbuis, voorzien van een (metalen) kraan.

5° Deze metalen buizen ontmoeten elkander *groepsgewijze* (b.v. iedere groep van vijf buizen) in een *verzamelaarskraan* (van metaal) betrekkelijk *groot van omvang*, met *even zooveel wegen* als er buizen zijn. De hoeveelheid dezer buizen stemt dus overeen met *die der reservoirs* (zie onder 4°), terwijl gezegde constructie ten doel heeft, ieder reservoir buiten werking te kunnen stellen, dat niet in orde is.

6°. Van ieder dezer verzamelaarskranen (te weten met verscheiden wegen; zie onder 5°) gaat *een enkele metalen geleidingsbuis*, en deze buizen vereenigen zich in een *gemeenschappelijke* (metalen) geleidingsbuis voor *al* de groepen van reservoirs (bijgevolg, voor al de reservoirs, die in functie zijn). Deze laatste geleidingsbuis (gemeen van al de groepen) komt uit in de werkzaal (zie wat lager), en is voorzien van twee (metalen) kranen. De buis staat in gemeenschap met

1° de vacuum-pomp, en

2° een geleidingsbuis leidende *naar het te vacueeren vat* (niet te verwarren met de reservoirs, waarvan boven sprake is).

Over eenige nadere bijzonderheden. De capaciteit en de stof der reservoirs (zij deze van glas of van eenig metaal) zijn vatbaar voor vele wijzigingen. Voor 't oogenblik bedient men zich van *glazen* reservoirs, ieder met een inhoud van ongeveer 20 liters, in groepen vereenigd van *vijf* reservoirs ieder (zie onder 5°), alles te zamen inhoudende 200 liters, wel te verstaan, om mede te beginnen. Het gedeeltelijk luchtledig blijft genoegzaam onveranderd gedurende weken, terwijl de kranen van vet zijn voorzien (met zoo weinig vet mogelijk, ook met 't oog op verstopping). Als het geheel goed wordt onderhouden, dan vereischt de toestel niet veel tijd, en weinig herstelling. De manometers zijn voorzien van kleine caoutchouc-ringen bij wijze van contrôle, om met een oogopslag te zien, of het gedeeltelijk luchtledig zich goed heeft gehouden.

De vacuum-batterij is geplaatst in den kelder van het Laboratorium, en de luchtpomp in de werkzaal, met elkander vereenigd door een metalen geleidingsbuis, als gezegd. In den regel werd het gedeeltelijk luchtledig van 60 tot 100 mm. der batterij niet overschreden, en bij gevolg heeft men het gedeeltelijk luchtledig in het luchtledig te maken reservoir (b.v. een vacuum-exsiccator) nog verder uit te pompen, zij dit b.v. met een lucht-kwipomp. Men stelt zich voor, een kwikpomp (of een andere pomp) *automatisch* te laten werken, b.v. in beweging gebracht door water als beweegkracht, of zich eenvoudig bedienende van een water-luchtpomp. Een vacuum-batterij biedt vele voordeelen aan. In de eerste plaats is een voordeel, om steeds een gedeeltelijk luchtledig tot zijn beschikking te kunnen hebben, namelijk met 't oog op luchtledig te maken reservoirs (b.v. vacuum-exsiccatoren); de nog overblijvende te verrichten arbeid toch vereischt betrekkelijk weinig tijd, hetzij daarbij gebruik makende van een kwik- of water-luchtpomp, enz. Ook is men oogenblikkelijk gereed, als het luchtledig slechts zeer gedeeltelijk is te bewerkstelligen; of de vacuum-batterij meer volkomen is ingericht.

Over een reserve-reservoir. Bij hetgeen is medegedeeld, wenschte men nog te voegen, dat het volstrekt noodig is, aan de luchtpomp, b.v. een kwik-luchtpomp, een reserve-reservoir te verbinden (b.v. van 2 of 3 liters), terwijl deze op zijn beurt is vereenigd met het te ledigen vat (b.v. een vacuum-exsiccator), en het reserve-reservoir voorzien is van een manometer, en de noodige kranen. Tusschen deze twee reservoirs bevinden zich *drie groote*

V-buizen, een van welke ten deele gevuld is met zwavelzuur (de twee andere bevatten niets, en doen dienst als beschermingsbuizen, met 't oog op het zwavelzuur).

Over de metalen buizen. Deze geleidingsbuizen zijn dusdanig in te richten, dat zij niet veel weêrstand aanbieden, hetgeen zich anders verhaalt op den tijd, vereischt tot het luchtledig maken, als gevolg der wrijving, die gansch niet een te veronachtzamen grootheid is. Dit nu is noodwendig te bereiken door zich te bedienen van buizen met een betrekkelijk groot lumen, en van kranen (die zich bevinden op den door de gassen afteleggen weg) voorzien van betrekkelijk breede wegen.

OVERZICHT.

De voortgezette studie der electrolyse van eenige zilverzouten, vermeerderd met die betreffende de reactie van *waterstofbioxyde* tegenover *zilveroxyde*, *zilverbioxyde*, enz., heeft geleid tot ongeveer de volgende uitkomsten. De studie van zoogenaamd peroxy-azijnzuur zilver gaf aanleiding tot eenige opmerkingen met betrekking tot *mierenzuur zilver*, *glucolzuur zilver* en *glucylzuur zilver*. Daarenboven zal men aantreffen, als in vorige Verhandelingen, eenige gegevens aangaande de snelheid van ontleding bij gewone temperatuur (zelfontleding) van *peroxy-salpeterzuur zilver* en *peroxy-zwavelzuur zilver*. Maar het verst strekkende punt is wel, dat de studie opleverde der reactie van *waterstofbioxyde tegenover zilveroxyde* ($Ag_2 O$), in strijd als de erlangde uitkomst is met hetgeen tot heden werd aangenomen, van af den arbeid van Thénard. Meer in bijzonderheden, zouden de uitkomsten aldus kunnen worden teruggegeven.

1. Aangezien analyses waren te verrichten met betrekkelijk veel stof, en de opbrengst zeer beperkt is, was het noodig, te trachten deze laatste te vermeerderen. De maximale opbrengst bleef evenwel ongeveer dezelfde, alleen de gemiddelde opbrengst werd iets grooter ¹⁾.

2. Daar een betrekkelijk geringe hoeveelheid stof ter beschikking was, werd ook de methode van uitsluiting gevolgd, met 't oog op het te analyseeren zilverzout (als afgeleide van het oorspronkelijk product), en wel door eenige eigenschappen van dit zout te

¹⁾ Zie deze Verhandeling pag. 1—6, 9—25.

vergelijken met overeenkomstige zouten, te weten van mierenzuur ¹⁾ glucolzuur ²⁾ en gluoxylzuur ³⁾ zilver, die konden ontstaan zijn (in water onoplosbare zouten, als koolzuur zilver, zuringzuur zilver, enz., zijn van zelf buiten gesloten).

3. Men was genoodzaakt, de som der opbrengsten te nemen van verschillende Bereidingen, om genoeg stof te hebben voor een analyse. De uitkomsten dezer analyses zijn echter niet afdoende, omdat de beschikbare hoeveelheid stof niet toeliet, elementair-analyse te doen (daar iedere analyse ongeveer 2 gr. stof vereischt, vanwege het overheerschende gehalte aan zilver en zuurstof), en dit is volstrekt noodig. Ook is de kans niet buitengesloten, dat het aangewende koolzuur zilver, sporen bevatte van natriumnitraat (zie de Verhandeling met betrekking tot de bereiding), en dientengevolge aanleiding gaf tot verwickelingen ⁴⁾.

4. Eenige wijzigingen zijn gebracht in de inrichting van den toestel. ⁵⁾

5. Opnieuw zijn analyses gedaan van zilverbioxyde, afkomstig van peroxy-zwavelzuur zilver ⁶⁾, en tevens van peroxy-azijnzuur zilver ⁷⁾ dusgenaamd.

6. Eenige waarnemingen zijn gedaan met betrekking tot de ontledingssnelheid van peroxy-zwavelzuur zilver ⁸⁾, en peroxy-salpeterzuur zilver ⁹⁾.

7. Monochloorazijnzuur zilver aan electrolyse onderworpen, gaf aan de anode slechts uiterst weinig van een afzetsel, dat geen ernstige studie toeliet. ¹⁰⁾

8. De electrolyse van seleenzuur zilver gaf een negatieve uitkomst. ¹¹⁾ Het is waar, de oplosbaarheid van het zout is tamelijk beperkt, maar er bestaat reden te veronderstellen, dat bij gewone temperatuur geen verbinding kan bestaan, die meer zuurstof bevat dan het seleniaat (in dit geval $Se O_4 Ag_2$), daar hoege-naamd niets werd afgezet aan de anode.

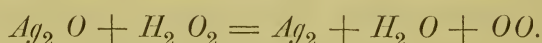
9. Men is teruggekomen op de structuurformule van zoogenaamd peroxy-salpeterzuur zilver ¹²⁾ ($3 Ag_2 O_2 \cdot NO_5 Ag$), en wel naar aanleiding van een arbeid door Tanatar; terwijl het geheel ook in verband staat met het vraagstuk betreffende het bestaan van verbindingen tusschen Fluorium en Zuurstof.

10. Aangezien men de verhouding wilde leeren kennen van zilverbioxyde ($Ag_2 O_2$) tegenover waterstofsuperoxyde ($H_2 O_2$), werd

¹⁾ l.c. pag. 5; ²⁾ l.c. pag. 8; ³⁾ l.c. pag. 9. ⁴⁾ l.c. pag. 21; ⁵⁾ l.c. pag. 21;
⁶⁾ l.c. pag. 23; ⁷⁾ l.c. pag. 24; ⁸⁾ l.c. pag. 25; ⁹⁾ l.c. pag. 26; ¹⁰⁾ l.c. pag. 25;
¹¹⁾ l.c. pag. 28; ¹²⁾ l.c. pag. 41.

dit nagegaan ¹⁾, maar na te zijn aangevangen met de studie van zilveroxyde ($Ag_2 O$) tegenover hetzelfde agens ²⁾ (te weten $H_2 O_2$); gevolgd door de studie met koolzuur zilver ³⁾ ($CO_3 Ag_2$), salpeterzuur zilver ⁴⁾ ($NO_3 Ag$), en peroxy-salpeterzuur zilver ⁵⁾ ($3 Ag_2 O_2 \cdot N O_5 Ag$) tegenover geoxydeerd water ($H_2 O_2$).

11. De uitkomst der proeven met betrekking tot de wijze, waarop zilveroxyde ⁶⁾ ($Ag_2 O$) zich verhoudt tegenover geoxydeerd water ($H_2 O_2$), is bovenal in hooge mate merkwaardig, daar deze niet overeenkomt met hetgeen algemeen, om zoo te zeggen zonder uitzondering, wordt aangenomen. Er werd *quantitatief* gewerkt, terwijl in hoofdzaak de weg werd gevolgd, in acht genomen bij de studie van peroxy-salpeterzuur zilver, enz. (zie de Verhandelingen dienaangaande). Het geoxydeerd water ($H_2 O_2$), waarvan werd uitgegaan, was genoegzaam zuiver. De voornaamste uitkomst bestaat daarin, dat het *gewicht* van *zilveroxyde* ($Ag_2 O$) *onveranderd* kan blijven (verondersteld, werkende onder zekere omstandigheden), bij de reactie met geoxydeerd water ($H_2 O_2$), zoodat de Vergelijking sinds Thénard aangenomen, geen reden meer zou hebben van bestaan, te weten de wel bekende Vergelijking:



Zelfs kan het zilverbioxyde ⁷⁾ ($Ag_2 O_2$) als *onveranderd* blijven, verondersteld, dat de reactie met geoxydeerd water ($H_2 O_2$) onder zekere omstandigheden plaats heeft.

12. Er is een reactie gegeven ⁸⁾ voor *zilverbioxyde* ($Ag_2 O_2$), bestaande in de verkleuring met diphenylamine ($2 C_6 H_5 \cdot H N$).

13. De vraag werd gesteld, om zooveel mogelijk de *verkleuring* te *fixeeren* bij *oxydatie* van *diphenylamine*, meer bepaald met geoxydeerd water ($H_2 O_2$). ⁹⁾

14. Men is teruggekomen op de vraag aangaande de structuurformule van Cyamelid ¹⁰⁾, waarover eenige jaren geleden in het Recueil werd gehandeld.

15. Een beschrijving is medegedeeld eener *gaslamp*, uitmakende een deel van een inrichting voor een *gasregulateur*, bestemd voor *hooge* temperaturen ¹¹⁾.

16. Er is een beschrijving gegeven van een *vacuum-batterij*. ¹²⁾

Utrecht, October 1902.

¹⁾ l.c. pag. 29; ²⁾ l.c. pag. 33; ³⁾ l.c. pag. 36; ⁴⁾ l.c. pag. 37; ⁵⁾ l.c. pag. 38;

⁶⁾ l.c. pag. 33; ⁷⁾ l.c. pag. 29; ⁸⁾ l.c. pag. 38; ⁹⁾ l.c. pag. 38; ¹⁰⁾ l.c. pag. 42;

¹¹⁾ l.c. pag. 43; ¹²⁾ l.c. pag. 46.

FOCALES DES COURBES PLANES ET GAUCHES

1^{re} PARTIE

Focales des coniques et focales de courbes
planes qui n'occupent pas de position particulière

PAR

W. A. VERSLUYS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE)

DEEL VIII N°. 5

AMSTERDAM

JOHANNES MÜLLER

1903

FOCALES DES COURBES PLANES ET GAUCHES

PAR

W. A. VERSLUYS.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

§ 1. *But*: Dans les pages suivantes je me propose de déterminer des formules, qui expriment l'ordre, la classe, le rang et les singularités de la focale d'une courbe d en fonction de l'ordre, de la classe, du rang et des singularités de la courbe donnée d .

Méthode: On appelle foyer d'une courbe le centre d'une sphère de rayon nul, doublement tangente à la courbe. La sphère de rayon nul est un cône: donc le foyer d'une courbe est en même temps le sommet d'un cône isotrope doublement tangent à la courbe.

On appelle focale d'une courbe le lieu de ses foyers. Assujettir une sphère à être doublement tangente à une courbe, c'est l'assujettir à deux conditions; l'assujettir à avoir un rayon nul, c'est l'assujettir à une troisième condition: donc, en général, il existera un lieu de foyers, qui sera une ligne.

La détermination de la focale d'une courbe est donc un cas spécial du problème plus général suivant: Déterminer le lieu des sommets des cônes du second degré, passant par une conique quelconque c_2 et doublement tangente à une courbe donnée d . Le lieu ainsi déterminé sera la focale, si l'on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini. Par extension je vais désigner encore par focale ce lieu des sommets des cônes passant par la conique c_2 , et je considère ces sommets encore comme foyers.

§ 2. Pour résoudre le problème plus général, on considère le sommet F d'un cône ($F c_2$) doublement tangent à la courbe don-

née d , et passant par la conique c_2 . Soit l une génératrice de ce cône ($F c_2$) passant par un des deux points, où ce cône touche la courbe donnée d . Alors le sommet F est le point de rencontre de deux droites l . Si le point F décrit la focale, les deux droites l décrivent une surface réglée O , dont la focale est une courbe nodale. Les deux tangentes aux courbes d et c_2 en les points, où ces deux courbes coupent la droite l , sont dans le plan tangent au cône ($F c_2$), le long de la génératrice l . Soit o le plan tangent au cône, tout le long de la génératrice l et o' un second plan o infiniment voisin. Le plan o' passera par une tangente à la courbe d et par une tangente à la conique c_2 , lesquelles seront infiniment voisines des deux tangentes à ces courbes d et c_2 , situées dans le plan o . Si le plan o' s'approche du plan o , les deux tangentes, situées dans ce plan o' , passent, à la limite, par les points, où le plan o touche les courbes d et c_2 . Donc, la limite vers laquelle tend la droite d'intersection des plans o et o' est la droite l , située dans le plan o . Par conséquent la surface développable, enveloppée par le plan o , quand ce plan o glisse sur les deux courbes d et c_2 , est la surface réglée, formée par les droites l .

Pour résumer: la focale d'une courbe d est une courbe nodale de la surface développable O , décrite par une droite l , qui glisse sur les courbes d et c_2 de sorte que les tangentes à ces deux courbes d et c_2 en leurs points de rencontre avec la droite l , sont dans un même plan o .

Donc, l'étude de la focale est l'étude de cette surface développable O . (voir *G. Darboux*: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, page 19).

§ 3. *Notations.* Les notations employées sont celles d'*Ernesto Pascal*, *Repertorio di Matematiche Superiori*, II Geometria; Ulrico Hoepli, Milano, 1900.

Je les fait suivre: Soit

n le degré de la courbe gauche;

r le rang;

h le nombre des noeuds apparents;

g le nombre des plans bitangents à la courbe, qu'on peut mener par un point donné?

β le nombre des points de rebroussement (points stationnaires);

H le nombre des points doubles (noeuds);

v le nombre des tangentes d'inflexion (tangentes, qui ont de commun avec la courbe, trois points infiniment voisins);

m la classe de la surface développable;

g le nombre des droites, dans un plan quelconque, par cha-

- cune desquelles passent deux plans tangents à la surface développable;
- x le nombre des points dans un plan quelconque, par chacun desquels passent deux génératrices de la développable, ou le degré de la courbe nodale;
- α le nombre des plan stationnaires, (plans qui ont de commun avec la courbe gauche, quatre points infiniment voisins);
- G le nombre des plans bitangents (tangents à la développable, suivant deux génératrices non infiniment voisines);
- c le nombre des génératrices d'inflexion (par chacune desquelles il passe trois plans osculateurs infiniment voisins);
- ω le nombre des génératrices doubles, qui sont tangentes à la courbe gauche dans deux points distincts;
- λ le nombre des génératrices, qui sont à la fois sécantes de la courbe gauche;
- λ' le nombre des plans osculateurs à la courbe gauche qui sont encore tangents à la courbe;
- p le genre de la courbe gauche;
- R le rang de la courbe nodale.

Pour ce qui suit, j'emploierai, par exemple, la lettre α pour indiquer le nombre des plans stationnaires; encore un plan α sera un plan stationnaire, tandis qu'un point α sera le point, où un plan α se trouve être osculateur à la courbe gauche.

Partout où ces symboles se rapportent à la focale je les saulignerai; ainsi $\underline{\beta}$ indiquera le nombre des points de rebroussement de la focale et un point \underline{H} sera un noeud de la focale.

Quand les symboles se rapportent à une projection, ces lettres seront munies d'un exposant.

Pour une courbe plane seront employées les notations suivantes: μ le degré, ν la classe, δ le nombre des noeuds, α le nombre des points stationnaire, τ le nombre des tangentes doubles, ι le nombre des tangentes stationnaires.

§ 4. *Généralités.* Si l'on veut déterminer les génératrices l de la surface développable O , qui passent par un point Q de la courbe donnée d , il faut mener en le point Q une tangente à la courbe d ; cette tangente rencontre deux tangentes à la conique c_2 . Si ces droites sont tangentes à la conique en les points P_1 et P_2 , les droites QP_1 et QP_2 sont des génératrices l . Par chaque point de la courbe d , il passe, par conséquent deux génératrices de la

surface O , ou cette courbe d est une courbe nodale de la développable O .

De même, une tangente à la conique c_2 en le point P rencontre, en général, plusieurs droites, tangentes à la courbe donnée d en les points Q_1, Q_2 etc. Les droites PQ_1, PQ_2 etc. seront des génératrices l de la développable O . Sur cette développable, la conique c_2 sera donc une courbe multiple.

La courbe nodale de la développable O consiste, par conséquent, en la courbe d , en la courbe c_2 et en une courbe résiduaire f . Cette dernière sera la courbe focale de la courbe donnée d . En effet, par chaque point F de la courbe f passent deux génératrices l_1 et l_2 , comme elle est une courbe nodale; si donc on considère le cône du second degré, qui a pour sommet ce point F et pour courbe de base la conique c_2 , sur ce cône seront situées les deux génératrices l_1 et l_2 et ce cône sera doublement tangent à la courbe donnée d . Les points de contact seront les points M_1 et M_2 , où la courbe d coupe les deux droites l_1 et l_2 puisque les tangentes à la courbe d en ces points M_1 et M_2 sont situées dans les plans σ , qui passent par les génératrices l_1 et l_2 , et que ces plans σ sont des plans tangents du cône (Fc_2).

§ 5. Si l'on considère le cône (Qc_2) dont un point Q , situé sur la courbe donnée d , est le sommet et dont la conique c_2 est la courbe de base, on remarquera que ce cône contient parmi ses génératrices deux droites l (§ 4), et que les plans σ , qui passent par ces génératrices l sont des plans tangents du cône (Qc_2) le long de ces droites l . Ces plans σ étant des plans tangents de la développable O le long de ces mêmes droites l , contiennent les tangentes à la focale f en les points où cette focale f rencontre les droites l , donc ce cône (Qc_2) est un cône doublement tangent à la focale, par conséquent, le sommet Q de ce cône est un foyer de la focale; il en résulte, que la courbe donnée d est la focale de la courbe focale f . (G. DARBOUX: Sur une classe remarquable etc. page 19).

En déterminant la courbe focale f d'une courbe d on résout en même temps le problème de trouver la courbe dont la courbe donnée d est la courbe focale.

En appliquant le théorème, que la focale de la focale f d'une courbe d , est la courbe d , il faut bien s'assurer que les deux courbes f et d soient des courbes nodales de la surface O .

Prenons, par exemple, pour la courbe d un cercle; alors la focale est une droite f , passant par le centre du cercle et perpen-

diculaire au plan de celui-ci. Il va sans dire que, dans ce cas, il n'y a pas de réciprocité entre les courbes f et d , une ligne droite n'admettant pas de foyers.

Ici le théorème tombe en défaut, la droite f n'étant pas une courbe nodale de la surface O , mais l'intersection de deux plans σ singuliers (§ 29).

Il y a encore un cas remarquable. Le cône du second degré, qui passe par la conique c_2 et dont le sommet est un point Q de la courbe d , ou un point F de la focale f , est bitangent à l'arête de rebroussement a de la surface O . Les points de contact sont les deux points, où les deux droites l qui passent par le sommet du cône touchent la courbe a . Par conséquent, la focale de la courbe a consiste en les deux courbes d et f . Les points de la courbe a ne sont pas des foyers des courbes d ou f ; donc, ici encore il n'y a pas de réciprocité.

Dans le cas que la développable O se décompose en deux développables O' et O'' , la focale de la courbe d consiste en la courbe d'intersection s des deux développables O' et O'' et en les courbes nodales de ces deux surfaces. La courbe d est une courbe focale de la courbe s , mais elle ne l'est évidemment pas des deux courbes nodales, donc, ici encore il n'y pas de réciprocité (voir § 70).

§ 6. *Des projections de la courbe d sur le plan V .* Si d'un point C de la surface O , comme centre de projection on projette la courbe donnée d sur le plan V de la conique c_2 , la projection est une courbe d' , tangente à la conique c_2 en le point, où la droite l passant par le point C rencontre la conique c_2 .

Si le centre de projection C est situé sur l'arête de rebroussement a de la surface O , la projection d' de la courbe d sur le plan V , aura un contact de l'ordre deux avec la conique c_2 en le point, où la droite l , qui est tangente à la courbe a en le point C , rencontre la conique c_2 .

Si le centre de projection est un point stationnaire β de l'arête de rebroussement a , la projection d' de la courbe d sur le plan V aura un contact de l'ordre trois avec la conique c_2 ; le point de contact est le point, où la conique c_2 coupe la droite l , tangente à la courbe a en le point β .

Si le centre de projection est un noeud H de l'arête de rebroussement a , la projection d' de la courbe d sur le plan V , aura deux contacts de l'ordre deux avec la conique c_2 ; les points de contact sont les points où la conique c_2 coupe les deux génératrices l , qui touchent la courbe a dans le noeud H .

Si le centre de projection est un point α de l'arête de rebroussement a , la projection d' de la courbe d sur le plan V devra avoir une tangente d'inflexion qui sera, en son point de contact avec la courbe d' , également une tangente d'inflexion de la conique c_2 . La tangente d'inflexion commune sera la droite d'intersection des plans V et α .

La conique c_2 ne possédant pas de tangentes d'inflexion, il s'ensuit que l'arête de rebroussement a ne possèdera pas de plans α . Ce raisonnement tombe en défaut, dès que le centre de projection se trouve dans le plan V de la conique c_2 . On peut donc énoncer le théorème suivant.

Si l'arête de rebroussement a de la développable O possède des plans stationnaires α , les points de contact α de ces plans seront tous situés dans le plan V .

Si le centre de projection est un point de la focale, la projection de la courbe d sur le plan V sera bitangente à la conique c_2 .

Si le centre de projection est un point triple de la surface O où se coupent trois nappes de la surface O et où passent par conséquent trois branches de la focale, la projection de la courbe d sur le plan V sera tritangente à la conique c_2 . Tous ces théorèmes tombent en défaut dès qu'on prend le centre de projection sur la courbe d , dans le plan V ou sur la surface développable dont la courbe d est l'arête de rebroussement.

§ 7. Les inverses de ces théorèmes sont également vrais. Ainsi, pour que la projection d' de la courbe d sur le plan V soit tangente, bitangente ou tritangente à la conique c_2 , il faut que le centre de projection soit situé sur la surface O , sur la focale, ou que ce soit un point triple de la focale.

Pour que la projection d' de la courbe d sur le plan V ait un contact de l'ordre un, deux ou trois avec la conique c_2 , il faut que le centre de projection soit situé sur la surface O , sur l'arête de rebroussement a de la surface O , ou que ce soit un point stationnaire β de la courbe a .

Pour les théorèmes précédents la courbe d est supposée n'avoir pas de position particulière par rapport à la conique c_2 ou par rapport au plan V .

Par exemple posons que la courbe d coupe la conique c_2 dans un point P . Soit π le plan déterminé par les deux tangentes aux courbes d et c_2 en le point commun P , alors en prenant le centre de projection dans le plan π , le point P sera un point de contact de la projection d' et de la conique c_2 . Donc, en ce cas, le lieu

des centres de projection pour lesquels la projection d' de la courbe d sur le plan V est tangente à la conique c_2 , consiste en la développable O et en le plan π .

CHAPITRE II.

FOCALES DES COURBES PLANES.

§ 8. *Des foyers conjugués.* Soit la courbe donnée d une courbe plane, située dans un plan W . Soit la droite z la droite d'intersection des plans W et V . Soient I et J les points d'intersection de la droite z avec la conique c_2 , située dans le plan V . Soit c'_2 la projection de la conique c_2 sur le plan W , le centre de projection étant un foyer F de la courbe d , alors la conique c'_2 passera par les points I et J et sera bitangente à la courbe d . Soit située dans le plan W une conique c''_2 , qui passe par les deux points I et J et qui est bitangente à la courbe d . Les deux coniques c_2 et c''_2 forment une courbe du quatrième degré, qui est la courbe de base d'un faisceau de surfaces du second ordre. Parmi ces surfaces du second ordre se trouvent deux cônes. Chacun de ces deux cônes passe par la conique c''_2 et par conséquent chacun d'eux est bitangent à la courbe d ; ils passent par la conique c_2 , donc le sommet de chacun de ces cônes est un foyer de la courbe d . A une conique c''_2 il correspond, par conséquent, deux foyers F_1 et F_2 de la courbe donnée d . Ces deux foyers seront dits conjugués.

Théorème. Deux foyers conjugués F_1 et F_2 sont en ligne droite avec un point fixe Z du plan V , ce point Z étant le pôle de la droite z relative à la conique c_2 .

Démonstration. Le plan π_1 , déterminé par les deux tangentes aux coniques c_2 et c''_2 en le point commun I est un plan tangent à toutes les surfaces du second ordre du faisceau déterminé par les deux coniques c_2 et c''_2 . Un plan tangent d'un cône devant passer par le sommet du cône, ce plan π_1 passera par les deux sommets F_1 et F_2 .

Il en est de même, pour le plan π_2 , déterminé par les deux tangentes aux coniques c_2 et c''_2 en le deuxième point commun J . Les deux sommets seront donc situés sur la droite d'intersection de ces deux plans π , cette droite d'intersection passe par le point d'intersection Z des deux tangentes à la conique c_2 en les deux

point s I et J . Le point Z est le pôle de la droite IJ , ou ce qui revient au même de la droite z , relative à la conique c_2 .

Faisons passer un plan quelconque π par les deux foyers conjugués F_1 et F_2 ; dans ce plan se trouveront deux génératrices de chacun des deux cônes $(F_1 c_2)$ et $(F_2 c_2)$.

Ces quatre génératrices formeront un quadrilatère complet, dont la droite $F_1 F_2$ et les deux droites d'intersection du plan π avec les plans V et W seront les diagonales. Il en résulte que les deux foyers conjugués F_1 et F_2 et les points d'intersection de la droite $F_1 F_2$ avec les plans V et W , forment un système harmonique.

Si la conique c_2 est remplacée par le cercle imaginaire de l'infini, le point Z sera la direction normale au plan W et on retrouve le résultat connu, que pour une courbe plane, le plan de cette courbe est un plan de symétrie de la courbe focale.

Par conséquent, si la courbe d possède des focales planes, le plan d'une quelconque f' de ces focales sera perpendiculaire sur le plan de symétrie W et la droite d'intersection sera un axe de symétrie de cette focale f' , ou si le plan d'une focale f' n'est pas perpendiculaire sur le plan W , il faut qu'il existe une seconde focale plane, qui est la figure symétrique de la focale f'' , par rapport au plan W . (§ 70).

De la réciprocité entre les courbes d et f' (§ 5) il s'ensuit que la droite d'intersection du plan W avec le plan de la focale f' est un axe de symétrie des deux courbes d et f' .

La projection de la focale sur le plan W , du point Z comme centre de projection, sera une courbe dont le degré est la moitié du degré de la focale. Le point, où la droite $Z F_1 F_2$ rencontre le plan W , est le point d'intersection des tangentes à la conique c''_2 en les points I et J , donc la projection de la focale sur le plan W , le point Z étant le centre de projection est le lieu des pôles de la droite z , par rapport aux coniques c''_2 .

Si la conique c_2 est remplacée par le cercle imaginaire de l'infini, les coniques c''_2 seront des cercles bitangents à la courbe d , et la projection orthogonale de la focale sur le plan W sera le lieu des centres des cercles bitangents à la courbe d .

Le cylindre projetant de la focale est le lieu des centres des sphères bitangentes à la courbe d .

Soit c'_2 une conique passant par les points I et J et tangente à la courbe d en les points R et R' . Soient F_1 et F_2 les deux foyers conjugués, correspondant à la conique c_2 . Les deux droites $F_1 R$ et $F_1 R'$ seront deux génératrices l de la développable O

et les plans tangents à la développable, le long de ces génératrices $F_1 R$ et $F_1 R'$, seront des plans, déterminés par ces droites et les tangentes à la conique c'_2 en les points R et R' . La droite d'intersection de ces deux plans, tangents aux deux nappes de la développable O qui passent par le point F_1 , sera la tangente à la focale au point F_1 . Par conséquent, la tangente à la focale en le point F_1 coupe le plan W dans le point d'intersection des deux droites tangentes à la conique c'_2 en les points R et R' . Il en est de même, pour la tangente à la focale en le point F_2 , ce qui donne le *théorème*: Les tangentes à la focale dans deux points conjugués F_1 et F_2 se rencontrent dans un point du plan W .

Si, donc, on considère la surface développable engendrée par les tangentes k à la focale, cette développable aura une courbe nodale plane, située dans le plan W , et deux plans osculateurs à la focale en deux foyers conjugués, se coupent suivant une tangente à cette courbe nodale.

§ 9. *Des interrections de la focale avec le plan W .* Si de deux foyers conjugués F_1 et F_2 , l'un s'approche du plan W , l'autre fera de même. Si le foyer F_1 arrive dans le plan W , il coïncide avec le point F_2 et la sécante ZF_1F_2 de la focale devient une tangente. Excepté au cas, que ce point d'intersection du plan W avec la focale, soit un point double de la focale; ce qui donne le *théorème*:

Les tangentes à la focale en ses points d'intersection avec le plan W passent par le point fixe Z , pourvu que ces points soient des points ordinaires de la focale.

Soit F_3 un point ordinaire de la focale situé dans le plan W , et F_2 un foyer infiniment voisin, alors la droite ZF_2 rencontra la focale encore une fois dans le foyer F_1 conjugué du foyer F_2 .

Le plan déterminé par les droites ZF_3 et ZF_1F_2 aura de commun avec la focale quatre points consécutifs, savoir: deux sur la tangente et deux sur la sécante. Ce plan sera donc un plan stationnaire α de la focale; d'où le *théorème*:

Les points d'intersections de la focale d'une courbe plane d avec le plan W de cette courbe d sont des points doubles ou des points α .

Il en résulte, que pourqu' une courbe f soit la focale d'une courbe plane il est indispensable qu'il existe un plan, qui coupe la courbe f seulement en des points α ou en des points doubles (des noeuds ou des points stationnaires).

§ 10. *De la symétrie de la courbe a .* Considérons dans le plan W une conique c'_2 , passant par les points I et J et ayant un

contact d'ordre deux avec la courbe d , on trouve par un raisonnement analogue à celui du § 8, que les sommets des deux cônes du second degré, qui passent par les deux coniques c_2 et c'_2 sont des points E_1 et E_2 de l'arête de rebroussement. On démontre facilement les théorèmes suivants.

1°. Les deux points E_1 et E_2 , correspondants à une conique c'_2 , sont en ligne droite avec le point Z ; ce point Z et le plan W sont en proportion harmonique, par rapport aux points E_1 et E_2 .

2°. Les tangentes à l'arête de rebroussement a en les deux points E_1 et E_2 se rencontrent dans un point du plan W .

3°. Les plans osculateurs o en les deux points E_1 et E_2 se coupent suivant une droite située dans le plan W .

4°. La section de la développable O par le plan W consiste en une courbe double et en des génératrices l .

5°. Les points où la courbe a rencontre le plan W sont des points α , des points stationnaires β ou des noeuds H de la courbe a .

6°. Si l'on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini, le plan W est un plan de symétrie de la courbe a et de la développable O .

Supposons qu'il existe dans le plan W une droite p et un point Z' , qui possèdent la propriété qu'une droite quelconque passant par le point Z' rencontre la droite p dans un point P_i et la courbe d dans des couples de points $Q_i Q'_i$, les points d'un couple étant conjugués harmoniques par rapport aux points Z' et P_i . Supposons encore que le point Z' se trouve sur la droite z et que la polaire z' du point Z' , par rapport à la conique c_2 rencontre la droite p . Le plan $(p z')$ et le point Z' sont alors en proportion harmonique avec chaque couple de points $Q_i Q'_i$ et avec chaque couple de points $R_n R'_n$, intersections de la conique c_2 avec une droite quelconque passant par le point Z' . Si un plan o touche la conique c_2 et la courbe d respectivement dans les points R_i et Q_i , les points R'_i et Q'_i seront les points de contact d'un autre plan o et les droites $(R_i Q_i)$, $(R'_i Q'_i)$ seront des droites l et se rencontrent dans un point du plan $(p z')$. Par conséquent, dans le plan $(p z')$ se trouve une courbe nodale de la surface O , qui est une focale de la courbe d .

Si maintenant on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini on obtient le théorème connu :

Si une courbe d possède un axe de symétrie p , la courbe aura une focale f' située dans un plan perpendiculaire sur le plan de la courbe et passant par la droite p ; cette droite p est un axe de

symétrie de la focale f' (*P. H. Schoute*: Comptes Rendus, 6 Déc. 1897 ou Verslagen K. A. v. W. 1897—1898.).

Avant d'aborder l'étude de la focale de la courbe plane la plus générale, je me propose de traiter quelques cas spéciaux plus simples, afin de nous familiariser avec la méthode employée, et d'étudier l'influence sur la focale des points singuliers de la courbe donnée.

CHAPITRE III.

FOCALES DES CONIQUES.

Section I.

§ 11. Soit à déterminer la focale d'une conique d_2 , située dans un plan W , laquelle coupe le plan V de la conique c_2 dans les points A_1 et A_2 .

Comme chaque tangente à la conique c_2 rencontre sur la droite d'intersection z des deux plans V et W , deux tangentes à la conique d_2 , la conique c_2 , de même que la conique d_2 , est une courbe nodale de la surface O .

Considérons la section de la surface O par le plan V . La conique c_2 fait partie de cette section. S'il y a hors de cette conique c_2 encore un point de la section, la génératrice l de la surface O , qui passe par ce point, est située tout entière dans le plan V , cette droite devant encore rencontrer la conique c_2 , et ayant par conséquent un deuxième point situé dans le plan V . Une droite l doit toujours rencontrer la conique d_2 , une droite l , qui est située dans le plan V doit, par conséquent, passer par un des deux points A_1 et A_2 . Une droite l située dans le plan V sera représentée par l_v .

Le plan o , qui est tangent à la surface O le long de la droite l_v , doit, comme tout plan o , être tangent à la conique c_2 . La droite d'intersection des plans v et V étant la droite l_v , la droite l_v doit être une tangente à la conique c_2 . Inversément, toute droite AS , menée par un des points A_1 et A_2 et tangente à la conique c_2 en le point S est une génératrice l_v , puisqu'elle rencontre les deux coniques dans les points A et S et que les tangentes aux coniques en ces deux points se rencontrent (dans le point A).

Toute la section de la surface O par le plan V se compose de la conique c_2 , laquelle, étant une courbe nodale, doit compter double, et des quatre droites l_v , qui sont des génératrices ordi-

naïres de la surface O et ne comptent pas double, puisque le plan V n'est pas tangent le long d'elles à la surface O . Le plan o , tangent le long d'une droite l_v , est le plan déterminé par la droite l_v , et par la tangente à la conique d_2 en le point A de la droite l_v .

Le section est donc du degré $2 \times 2 + 4 \times 1 = 8$, ou bien : $r = 8$.

Le plan V n'est pas un plan o , parce que un plan o doit toucher à la conique d_2 , et le plan V coupe la conique d_2 dans les points A_1 et A_2 .

De même le plan W n'est pas un plan o et le plan W coupe la développable O suivant une courbe du degré huit, qui consiste en la conique d_2 et en quatre droites l_w passant par les points I et J .

§ 12. *Détermination de m .* Pour déterminer m , la classe de la développable O , il faut chercher le nombre de plans o , qui passent par un point quelconque P de l'espace. Un plan o est tangent aux coniques d_2 et c_2 , la droite d'intersection du plan V avec un plan o passant par le point P sera tangente à la conique c_2 et aussi à la conique d'_2 , qui est la projection sur le plan V de la conique d_2 , le centre de projection étant le point P . Et inversement, tout plan passant par le point P et une tangente commune des deux coniques c_2 et d'_2 sera un plan o passant par le point P . Le nombre de tangentes communes aux deux coniques étant quatre, il passe par chaque point de l'espace quatre plans o , ou bien : $m = 4$.

§ 13. *Détermination de α :* nombre des plans stationnaires de la développable O .

Si un plan o coïncide avec un plan consécutif, ce plan o sera un plan α . Soit P un point de la conique c_2 et t la tangente à la conique c_2 en le point P . Les plans qui passent par la droite t et une des deux génératrices l_1 et l_2 qui se rencontrent dans le point P , seront deux plans o . Le plan o' , infiniment voisin d'un de ces deux plans o , passera, en général, par la tangente t' de la conique c_2 consécutive à la tangente t .

Si le plan o coïncide avec le plan o' , le plan o , passera aussi par la tangente t' et devra donc être le plan V des deux tangentes t et t' . Le plan V n'est pas un plan o , donc si deux plans o consécutifs coïncident, ces deux plans doivent passer par la même tangente t à la conique c_2 , et les deux plans consécutifs seront les plans $(t l_1)$ et $(t l_2)$. Leur intersections avec le plan W étant deux droites coïncidentes, chacune étant une tangente à la conique d_2 , il faudrait que la conique d_2 eût une tangente stationnaire ou

il faudrait que le plan α coïncide avec le plan W . Or, une conique ne présentant pas cette singularité et son plan n'étant pas un plan o , deux plans consécutifs ne coïncident pas.

Donc: $\alpha = o$.

§ 14. *Détermination de H* : nombre des noeuds de l'arête de rebroussement.

Si l'on projette, d'un noeud H de l'arête de rebroussement α , comme centre de projection, la conique d_2 sur le plan V la projection d'_2 devrait avoir avec la conique c_2 , dans deux points distincts, un contact de l'ordre deux. Les coniques d'_2 et c_2 auraient alors six points communs, donc elles devraient coïncider. Comme les deux coniques c_2 et d_2 coupent la droite d'intersection z des plans V et W dans des points distincts, les coniques d'_2 et c_2 ne pourront pas coïncider, par conséquent, il ne peut pas exister de point H ; donc: $H = o$.

§ 15. *Détermination de G* : nombre de plans doubles de la développable O .

Pour obtenir un plan G , il faut que deux plans o , non consécutifs, coïncident. Deux plans o tangents à la conique c_2 en les points P et Q ne peuvent jamais coïncider, les tangentes à la conique c_2 en ces points P et Q ne coïncident pas, excepté le cas, où le plan V soit un plan o , ce qu'il n'est pas.

Si donc deux plans o coïncident, ces plans devront passer par une même tangente à la conique c_2 .

Par le point P_1 , où la droite t est tangente à la conique c_2 , il passe deux génératrices l_1 et l_2 . Les plans $(t\ l_1)$ et $(t\ l_2)$ seront les deux plans o qui passent par la tangente t ; si ces deux plans coïncident, les deux tangentes à la conique d_2 , en les points, où cette conique rencontre les droites l_1 et l_2 , devront coïncider. Comme il n'existe pas de droite bitangente à une conique, les deux plans o , passant par la droite t , ne pourront coïncider. Il n'est pas nécessaire que les deux tangentes à la courbe d coïncident, ou que la courbe d possède une bitangente, si le plan G coïncide avec le plan W . Comme le plan W n'est pas un plan o ce plan W ne peut pas être un plan G .

Il se peut encore que les deux tangentes à la courbe d en les points où elle rencontre les droites l_1 et l_2 coïncident si ces deux droites passent par le même point de la courbe d . Le point de rencontre des droites l_1 et l_2 étant le point P_1 , il faudrait que la courbe d passe par le point P_1 , ou bien il faudrait que les courbes

c_2 et d se rencontrent. Cette position particulière a été exclu. Par conséquent: $G = 0$.

§ 16. *Détermination de v* : nombre des droites d'inflexion, ou bien, nombre de fois que deux droites l consécutives coïncident. Deux droites l consécutives passent, soit par deux points consécutifs, soit par un même point de la conique c_2 . Si deux droites consécutifs l , passant par deux points consécutifs de la conique c_2 , coïncident, la droite v , qu'elles forment, passera par ces deux points consécutifs et devra être une tangente à la conique c_2 , donc la droite v sera une droite l_v . Une droite v est une génératrice double de la développable O , tandis que les plans o , tangents à la développable le long de cette droite v coïncident. Pour qu'une droite l_v soit une droite v il faut donc, qu'une droite l_v soit une droite double et que ses deux plans tangents o coïncident.

Posons que les deux droites l consécutives, qui en coïncidant forment une droite v , passent par un même point P de la conique c_2 ; les deux droites l passent par deux points consécutifs de la courbe d . La droite v passe par ces deux points consécutifs de la courbe d , donc elle sera une tangente à la courbe d , ou elle devra passer par un point stationnaire de la courbe d .

Quand la courbe d est une conique d_2 , la courbe d ne possède pas de point stationnaire et les droites l_v et l_w ne sont pas de droites doubles; la surface O ne possédant pas de droites v , $v = 0$.

§ 17. *Détermination de w* : nombre des génératrices doubles de la surface O .

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent ou trouve sans aucune difficulté que, pour que la surface O puisse avoir une génératrice double ω , il faut qu'une des droites l_v ou l_w soit une droite double, ou que la courbe d possède un noeud. Maintenant que la courbe d est une conique d_2 , qui ne possède jamais de noeud, les génératrices l_v et l_w sont des droites simples; donc $\omega = 0$.

§ 18. Maintenant que sont connues les quantités:

$$r = 8, m = 4, \alpha = 0, H = 0, G = 0, v = 0, \omega = 0$$

on peut au moyen des formules de *Cayley-Plücker* déterminer les nombres, n, x, h, g, y, β, p et R ; voir: *E. Pascal*. Repertorio II. Geometria. pages 321, 322, ou *Salmon*, Geometry of three dimensions, fourth edition, pages 293—295. Si dans la suite j'aurai à renvoyer à ces deux ouvrages je les indiquerai par la

notation: *E. Pascal* II p. 321—322 et *Salmon* 3 D p. 293—295. Pour ce qui est de l'usage de *Salmon* il faut faire attention à ce que j'ai employé une notation un peu différente, celle de *Pascal*, qui met les m pour les n et inversement et remplace les γ par les λ .

Ainsi on obtient les valeurs suivantes:

$$n = 12, x = 8, \beta = 16; y = 16, h = 38, g = 2, p = 1, R = 8.$$

§ 19. *Des intersections de l'arête de rebroussement avec le plan V .* Comme $n = 12$ l'arête de rebroussement a est une courbe du degré douze. Pour contrôler les résultats obtenus, déterminons les points d'intersection de l'arête de rebroussement a avec le plan V .

D'ailleurs il sera toujours utile de connaître la nature de ces points, puisque, si l'on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini, le plan V devient le plan de l'infini et ces points d'intersection seront les points à l'infini de la courbe a .

Ces points d'intersection seront situés sur la conique c_2 et sur les quatre droites l_v .

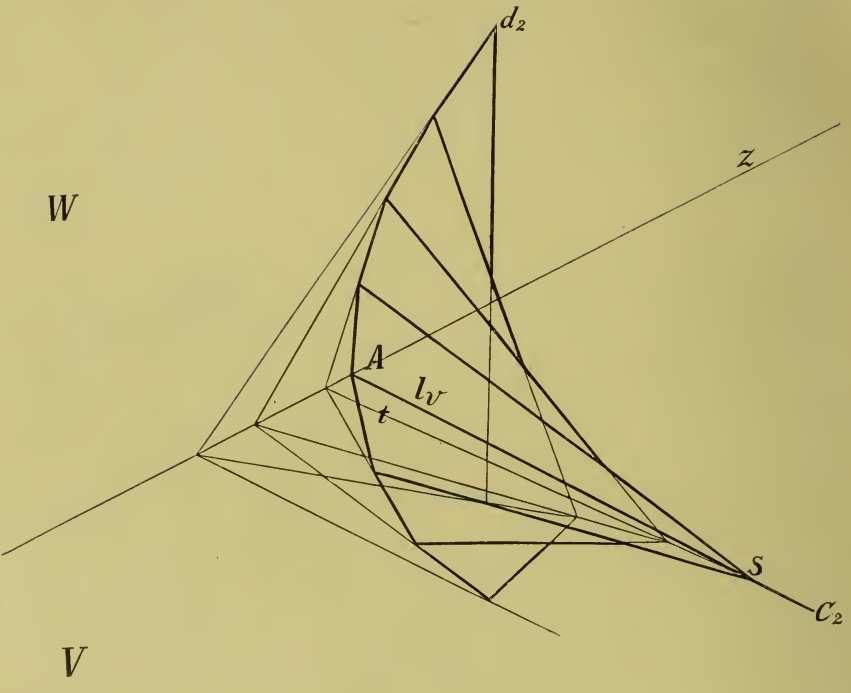
Le point où une droite l est tangente à l'arête de rebroussement est la limite du point d'intersection de la droite l avec un plan o , situé à une distance infiniment voisine, si ce plan o s'approche de la droite l . Par conséquent, le point où la droite l_v est tangente à l'arête de rebroussement a sera la limite vers laquelle tend le point d'intersection de la droite l_v avec un plan o passant par une tangente t de la conique c_2 consécutive à la tangente l_v , si cette tangente t tend vers la tangente l_v . Le point d'intersection de la droite l_v avec ce plan o est le point où la droite l_v rencontre la tangente t . La limite vers laquelle tend l'intersection de ces deux tangentes sera le point S , où la droite l_v est tangente à la conique c_2 . Par conséquent, les quatre points S , où les quatre droites l_v sont tangentes à la conique c_2 sont des points de l'arête de rebroussement a . Un point S doit compter pour deux intersections de la courbe a avec le plan V , le plan V passant par la tangente l_v à la courbe a en les points S , et ne coïncidant pas avec le plan osculateur v de la courbe a en ce point S . En effet, ce plan osculateur o est déterminé par la droite l_v et par la tangente à la courbe d_2 en le point A où la droite l_v rencontre la courbe d_2 . Pour déterminer les points de l'arête de rebroussement a , situés sur la conique c_2 , il faut chercher les points P , où une des deux droites l , qui y passent, rencontre une droite l consécutive; donc il faut déterminer les points P de la conique c_2 , pour lesquels les deux droites l , qui y passent, sont deux génératrices consécutives. Pour cela, il faut que ces deux droites l passent par deux points consécutifs de la

courbe d_2 . On obtient les deux points Q_1 et Q_2 de la conique d_2 , par lesquels passent les deux droites l qui se rencontrent au point P de la conique c_2 de la manière suivante. Soit R le point où la tangente à la conique c_2 en le point P rencontre la droite d'intersection z des plans V et W . Si l'on mène de ce point R les deux tangentes à la courbe d_2 , les deux points de contact sont les points Q_1 et Q_2 . Ces deux points coïncident uniquement si le point R est sur la conique d_2 , donc si le point R coïncide avec un des deux poits A ; alors le point P coïncide avec un des quatre points S . Donc, les seuls points, où l'arête de rebroussement a rencontre le plan V , sont les quatre points S , qui, par conséquent doivent compter pour trois intersections chacun. Au paragraphe précédent nous avons trouvé, que ces points comptent pour deux intersections chacun.

§ 20. Pour enlever cette contradiction, remarquons qu'un point S pourrait encore compter pour trois intersections de la courbe a avec le plan V , sans être un point, où le plan V est osculateur, si ce point S est un point double de l'arête de rebroussement a . Un point double de l'arête de rebroussement est, de la développable O , un point multiple de l'ordre trois ou quatre, selon que le point double de l'arête de rebroussement est un point stationnaire β ou un noeud H . Les points S devront donc être des points multiples de l'ordre trois ou quatre de la surface O . Tous les points de la conique c_2 , étant des points doubles, il faut chercher, s'il y a sur la conique c_2 des points singuliers d'une multiplicité plus grande. Par chaque point de la conique c_2 , il passe deux génératrices l_1 et l_2 ; par un point singulier S' , il passe encore une troisième génératrice l_3 . Cette génératrice l_3 appartient à un autre, point de la conique c_2 , donc elle doit être située dans le plan V . Les seules droites l , situées dans le plan V sont les quatre droites l_v , qui sont tangentes à la conique c_2 en les quatre points S . Une droite l_v , étant tangente à la conique c_2 en le point S , passe encore par un point infiniment voisin du point S . Par ce point infiniment voisin du point S , il passe, par conséquent, trois droites l , donc ce point infiniment voisin du point S est un point singulier sur la conique c_2 .

On peut s'assurer d'une autre manière que les points S sont des points triples de la surface O . En effet, par un point S , il passe trois branches de la courbe d'insection de la surface O avec le plan V , savoir la conique c_2 , qu'il faut compter double et la droite l_v . Le plan V , n'étant pas un plan σ , n'est pas tangent à

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS



une des nappes de la surface O , qui passent par le point S , par conséquent, les trois branches d'intersection proviennent de trois nappes différentes de la surface O . Par le point S il passe, par conséquent, trois nappes de la développable O , ou bien le point S est un point triple de la surface O .

§ 21. Pour démontrer qu'un point S est un point stationnaire β de l'arête de rebroussement a , remarquons que la droite l_v , qui est tangente à la conique c_2 en le point S , rencontre la courbe d_2 , donc elle rencontre deux tangentes consécutives à la conique d_2 . Par conséquent, par la droite l_v il passe deux plans tangents aux deux coniques c_2 et d_2 à la fois, ou par la droite l_v il passe deux plans o consécutifs. Soit t une tangente à la conique c_2 infiniment voisine de la tangente l_v , cette tangente rencontre deux tangentes à la conique d_2 , qui sont infiniment voisines des deux tangentes à la conique d_2 , qui rencontrent la droite l_v . Par la tangente t il passe, par conséquent, deux plans o encore. Par le point d'intersection des droites l_v et t , il passe, par conséquent, quatre plans o , qui passent par quatre tangentes consécutives à la conique d_2 et par deux tangentes consécutives à la conique c_2 , lesquels seront donc quatre plans o consécutifs. La limite vers laquelle tend le point d'intersection des droites t et l_v , si la droite t s'approche de la droite l_v , est le point S , donc le point S est un point stationnaire β .

Un point S étant un point stationnaire β de la courbe a , et la tangente l_v à la courbe a , en ce point S étant située dans le plan V , un point S compte pour trois intersections de la courbe a avec le plan V . Comme il y a quatre points S , la courbe a rencontre le plan V dans douze points.

On démontre de la même manière que les douze points d'intersection de l'arête de rebroussement a avec le plan W , seront les quatre points de contact des droites l_w avec la conique d_2 , qui sont également des points stationnaires β et qui comptent chacun pour trois intersections.

Il est facile de voir, qu'on démontre de la même manière le *théorème* général.

Si une tangente à l'une des courbes d ou c_2 rencontre l'autre courbe, cette tangente sera une génératrice l et le point de contact est un point stationnaire de l'arête de rebroussement a .

§ 22. *La focale se décompose en deux coniques. x étant huit (§ 18)*

la courbe nodale est une courbe du degré huit. Les deux coniques c_2 et d_2 faisant partie de la courbe nodale, il reste quatre pour le degré de la courbe focale. R étant huit, le rang de la courbe nodale est huit, le rang de chacune des deux coniques nodales c_2 et d_2 , étant deux, il reste quatre pour le rang de la courbe focale.

Il n'existe pas de courbe gauche du quatrième degré, dont le rang soit quatre, donc la focale f doit se décomposer ou être une courbe plane.

La focale f doit rencontrer le plan V dans quatre points; ces points seront des noeuds de la courbe d'intersection du plan V avec la surface O et inversement tous les points doubles de la courbe d'intersection seront des points des courbes doubles de la développable O , le plan de section V n'étant pas un plan tangent o de la surface O .

La courbe d'intersection consiste en la conique c_2 et en les quatre droites l_v . Les quatre droites l_v se rencontrent dans six points; deux de ces six points sont les deux points A situés sur la conique d_2 , les quatre autres points d'intersection seront sur la focale. Les points S sont encore des points multiples de la section, mais ces points multiples sont situés sur la courbe a . Le plan V coupe, par conséquent, la focale dans quatre points, qui doivent compter, pour une intersection chacune, la tangente à la focale en un de ces points, étant la droite d'intersection des deux plans o qui passent par les deux droites l_v , dont ce point est l'intersection. Cette tangente n'est pas située dans le plan V donc la focale coupe le plan V et n'est pas tangente au plan V . Ces quatre points sont des points ordinaires de la focale puisque par chaque point il ne passe que deux nappes de la surface O qui ne se touchent pas.

De même la focale coupe le plan W dans quatre points, qui sont des points ordinaires de la focale, savoir les quatre points, où les deux droites l_w qui passent par le point I rencontrent les deux autres passant par le point J . Ces quatre points étant des points ordinaires de la focale sont des points \underline{z} (§ 9); par conséquent, la focale f ne saurait se décomposer en une droite et une cubique gauche; elle ne saurait se décomposer non plus en une droite et une cubique plane, puisque des quatre points d'intersection des quatre droites l_v , jamais trois ne seront en ligne droite; à plus forte raison la focale ne peut pas être une courbe plane du quatrième degré.

L'unique possibilité qui reste est que la focale se décompose en deux coniques, dont aucune se décompose en deux droites, puisque

les seuls droites qui sont situées sur une surface développable O sont les génératrices et la surface O ne possède pas des génératrices doubles puisque $\omega = 0$.

§ 23. Que la focale consiste en deux coniques, se démontre encore de la manière suivante. Considérons une conique c'_2 située dans le plan W , passant par les deux points I et J et qui est doublement tangente à la conique d_2 . Les deux coniques d_2 et c'_2 déterminent un faisceau de coniques, les points d'intersection des coniques de ce faisceau, avec le droite z forment une involution, dont les points A_1 , A_2 et I , J sont deux couples de points. La corde de contact des deux coniques comptée deux fois, est une conique du faisceau; cette conique coupe la droite z dans deux points coïncidents, par conséquent, cette corde de contact passe par un des deux points doubles D et D' de l'involution. Par conséquent, il y aura deux séries de coniques c'_2 , pour les coniques de l'une des deux séries, la corde de contact avec la conique d_2 , passe par le point D , pour ce qui est des coniques de l'autre série la corde de contact passe par le point D' . Les points D et D' forment un système harmonique avec les points I et J , de même qu'avec les points A_1 et A_2 .

Le plan π déterminé par les droites polaires du pôle D , par rapport aux coniques c_2 et c'_2 est le plan polaire du pôle D par rapport à toutes les surfaces du second degré, qui passent par ces deux coniques. Par conséquent, ce plan π passe par les sommets F_1 et F_2 , des deux cônes de ce faisceau de surfaces du second degré, il en résulte que la droite ZF_1F_2 rencontre la polaire d du point D par rapport à la conique c'_2 . Cette droite d coïncide avec la polaire du pôle D par rapport à la conique d_2 ; donc la droite ZF_1F_2 rencontre la polaire d du point D par rapport à la conique d_2 . Ou bien les foyers correspondant aux coniques c'_2 , pour lesquelles la corde de contact passe par le point D , sont situés dans un plan (Zd) ; ce plan passe par le point D' .

Le lieu des foyers, situés dans ce plan est une conique, toute droite passant par le point Z coupant ce lieu en deux points, et ce point Z n'étant pas lui même un foyer.

Par conséquent, la focale consiste en deux coniques, l'une située dans le plan (Zd) , l'autre, dans le plan (Zd') ; d' étant la polaire du point D' par rapport à la conique d_2 .

§ 24. Une troisième manière de démontrer que la focale f consiste en deux coniques, est la suivante. Par un point quel-

conque E de la droite z on peut mener deux droites tangentes à la conique c_2 en les points P_1 et P_2 , ainsi que deux droites tangentes à la conique d_2 en les points Q_1 et Q_2 .

Les quatre droites $P_1 Q_1$, $P_1 Q_2$, $P_2 Q_1$, $P_2 Q_2$, seront des droites l . En général, ces quatre droites l ne seront pas dans un même plan. Ces quatre droites l seront dans un même plan si les deux cordes de contact $P_1 P_2$ et $Q_1 Q_2$ se rencontrent. Pour cela, il faut que les deux cordes de contact passent par un même point de la droite z . Pour que cela arrive, la condition nécessaire et suffisante est que le point E soit le conjugué harmonique du même point par rapport aux deux couples de points I, J et A_1, A_2 .

Il faut donc que le point E soit un des points doubles D ou D' de l'involution, déterminée par les deux couples de points I, J et A_1, A_2 .

Menons par le point D les droites tangentes aux coniques c_2 et d_2 en les points P_1, P_2 et Q_1, Q_2 . Les droites $P_1 P_2$ et $Q_1 Q_2$ passent par le point D' ; le plan $(P_1 P_2 Q_1 Q_2) = \pi$ est un plan dans lequel se trouvent quatre droites l , savoir $P_1 Q_1$, $P_1 Q_2$, $P_2 Q_1$, $P_2 Q_2$. Ces quatre droites se coupent en six points, savoir les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 et deux autres R_1, R_2 . Les points $R_1 R_2$ sont des points de la focale f puisque par chacun d'eux il passe deux droites l . Sur la droite $P_1 P_2$ se trouvent deux points où se rencontrent deux droites l_v , sur la droite $Q_1 Q_2$ se trouvent deux points de rencontre de deux droites l_w . Dans ce plan π se trouvent, par conséquent, six points de la focale. De même, dans le plan π' , déterminé par les polaires du point D' , par rapport, aux coniques d_2 et c_2 , se trouvent six foyers. La focale f qui est du degré quatre doit donc se composer de deux courbes planes, qui seront des coniques, tout ce qu'on peut démontrer du plan π étant encore vrai pour le plan π' .

Il se voit aisément que les quatre plans V, W, π et π' forment un tétraèdre, que dans chaque face de ce tétraèdre se trouve une conique nodale de la surface et que les trois arêtes dans chaque face forment un triangle autopolaire par rapport à la conique dans cette face. Si on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini, les deux plans π et π' seront les deux plans de symétrie de la conique d_2 .

§ 25. Les polaires réciproques des deux coniques c_2 et d_2 sont deux cônes C_2 et D_2 , la polaire réciproque de la développable O , lieu des plans tangents aux coniques c_2 et d_2 à la fois, est la courbe d'intersection c_4 des deux cônes. Par cette courbe d'inter-

section c_4 passent encore deux cônes du second degré, de manière que sur chaque génératrice d'un de ces cônes se trouvent deux points de la courbe d'intersection c_4 . Les polaires réciproques de ces deux cônes seront deux coniques et par chaque tangente à une de ces coniques passeront deux plans tangents σ de la développable O , par conséquent, ces coniques seront des courbes nodales de la surface O . Comme le lieu des plans bitangents de la courbe c_4 consiste en les quatre cônes du second degré, la courbe nodale de la surface O consistera en les quatre coniques, ce qui démontre encore une fois que la focale de la conique d_2 consiste en deux coniques.

De la même manière on pourrait trouver la courbe nodale et, par conséquent, la focale aussi, de la courbe donnée d , en déterminant la développable, lieu des plans bitangents de la courbe d'intersection d'un cône du second degré avec la développable qui est la polaire réciproque de la courbe d , considérée comme lieu de ses plans tangents.

Section II.

POSITIONS PARTICULIÈRES DE LA CONIQUE d_2 .

§ 26. *La conique d_2 touche la droite z en le point A , la droite z étant la droite d'intersection des deux plans V et W dans lesquels sont situées les deux coniques.*

La conique c_2 est une courbe simple de la surface O , chaque tangente à la conique c_2 rencontre, il est vrai deux tangentes à la conique d_2 , mais la droite z est toujours une de ces tangentes. Le plan V est donc pour chaque point de la conique c_2 l'un des deux plans σ , qui passent par ce point; quand on fait abstraction de ce plan σ singulier, il ne passe par chaque point de la conique c_2 qu'un seul plan σ . Menons du point A les deux tangentes l_v à la conique c_2 ; soient S_1 et S_2 les deux points de contact. Alors, pour un point S aussi le deuxième plan σ coïncide avec le plan V . Le plan V est, par conséquent, un plan σ double. La développable O est tangent à ce plan V le long des droites AS_1 et AS_2 . L'intersection du plan V avec la développable se compose de la conique c_2 , qui est une courbe simple, et des deux droites l_v , qui doivent compter double, donc:

$$r = 2 + 2 \times 2 = 6.$$

L'intersection de la développable O avec le plan W consiste en la conique d_2 , qui doit compter double, comme elle est une courbe nodale et en deux droites l_w , savoir les deux tangentes, autres que la droite z , qu'on peut mener à la conique d_2 des points I et J . La section est encore du degré $2 \times 2 + 2 \times 1 = 6$.

On trouve facilement les valeurs suivantes:

$$m = 4, \alpha = 0, v = 0, \omega = 0, G = 1,$$

et on en déduit au moyen des formules de *Cayley-Plücker*.

$$g = 2, h = 6, y = 6, \beta = 4, n = 6, x = 4, p = 0.$$

Les points d'intersection de l'arête de rebroussement a avec le plan V sont les deux points S qui comptent chacun pour trois, le plan osculateur o en un point S étant le plan V .

Les points d'intersection du plan W avec l'arête de rebroussement a sont les deux points de contact des deux droites l_w avec la conique d_2 . Ces points sont des points stationnaires, dont la tangente est dans le plan W , par conséquent, ils comptent pour trois intersections chacun. (§ 21).

$x = 4$. La courbe nodale est de l'ordre quatre, la conique d_2 en fait partie, par conséquent le degré de la focale est deux. La focale f doit rencontrer le plan W dans deux points, ces points, de rencontre sont: le point d'intersection des deux droites l_w , et le point A . Le point A est situé sur la focale, parce que le point A est le point de contact des deux nappes de la surface O qui sont tangentes au plan V le long des deux droites l_v . Ce point A est, par conséquent, un noeud de la courbe nodale. Par le point A doivent passer deux branches de la courbe nodale, l'une est la courbe d_2 , l'autre branche doit faire partie de la focale. Les tangentes aux deux branches de la courbe nodale, sont situées dans le plan tangent commun des deux nappes de la surface O . Par conséquent, la focale est tangente au plan V en le point A .

Par conséquent: la focale d'une parabole est une parabole.

§ 27. La conique d_2 est tangente au plan V en le point I . Si le point de contact A (§ 26) est extérieur à la conique c_2 les deux droites l_v sont réelles et le plan V est un plan bitangent proprement dit. Si le point de contact A est intérieur à la conique c_2 les deux droites de contact l_v sont imaginaires; donc le plan bitangent V est un plan double isolé.

A la position intermédiaire, donc si le point A est sur la conique c_2 , le plan bitangent doit devenir un plan stationnaire α .

Pour l'étude des focales des courbes réelles ce cas n'a aucune importance, puisque si la conique d_2 rencontre la conique c_2 dans un seul point, la conique d_2 deviendra imaginaire, aussitôt que la conique c_2 devient le cercle imaginaire de l'infini.

La section du plan V avec la surface O consiste en la conique c_2 , qui est une courbe simple et en la droite tangente l_v à la conique c_2 en le point I . Le plan V est un plan α donc la droite l_v doit compter trois fois.

L'intersection du plan W avec la surface V consiste en la conique d_2 qui doit compter double et en la tangente l_w à la conique d_2 , qui passe par le point J . Les deux sections étant du degré cinq: $r = 5$.

Le plan V étant un plan stationnaire: $\alpha = 1$.

On trouve facilement:

$$m = 4, v = 0, \omega = 0, H = 0, G = 0.$$

Alors par les formules de *Cayley-Plücker* on trouve:

$$n = 4, x = 2, y = 2, \beta = 1, h = 2, g = 2, p = 0.$$

Les quatre intersections de l'arête de rebroussement a avec le plan V se confondent dans le point I , parce que le plan V est un plan stationnaire tangent en le point I .

L'arête de rebroussement rencontre le plan W , une fois au point I et trois fois au point de contact de la droite l_w avec la conique d_2 ; ce dernier point étant un point stationnaire β de la courbe a , doit compter pour trois intersections. (§ 21).

$x = 2$ et la conique d_2 étant une courbe nodale, il n'y a pas de focale. On peut encore voir, de la manière suivante, qu'il n'y a pas de focale. La projection d'_2 de la conique d_2 sur le plan V , coupera toujours la courbe c_2 , donc cette conique d'_2 ne pourra jamais être bitangente à la conique c_2 , quelque soit le point qu'on choisit pour centre de projection.

§ 28. Soit la droite d'intersection z des plans V et W une tangente commune des coniques c_2 et d_2 . Les points de contact sont les points I et A . Si la conique c_2 est remplacée par le cercle imaginaire de l'infini, le plan W est un plan isotrope, donc la

conique d_2 devient imaginaire. Pour les focales des courbes réelles ce cas est dénué d'intérêt.

Je ne le considère que, parce que nous avons vu au § 16 qu'une tangente commune pourrait être une droite d'inflexion V de la surface O .

Tout plan passant par la droite z est un plan o , donc la droite z est une droite singulière l , mais la droite z n'est pas une génératrice de la surface O , ainsi qu'on peut le voir en déterminant les droites l qui passent par un point infiniment voisin d'un des points I ou A .

La section de la surface O par le plan V consiste en la conique c_2 , qui est une courbe simple et en la droite l_v , qui est une tangente à la courbe c_2 qu'on peut mener par le point A . Le plan V est tangent à la développable O le long de cette droite l_v ; donc cette droite doit compter double. La section de la développable O par le plan W consiste en la conique d_2 , qui est une courbe simple et en la tangente l_w à la conique d_2 , qui passe par le point I et qui est une droite de contact. Les deux sections étant du degré quatre: $r = 4$.

On trouve $n = 3$; donc la surface O est une développable dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche.

Cette développable ne présentant pas de courbe nodale, il n'y a pas de focale non plus; résultat qui était à prévoir puisque les coniques d'_2 et c_2 ayant toujours la tangente commune z , elles ne pourront plus être bitangentes.

§ 29. *Supposons que la conique d_2 passe par les deux points I et J de la conique c_2 .* La section de la surface O par le plan V est la conique c_2 , qui est une courbe nodale.

La section de la surface O par le plan W est la conique d_2 , qui est encore une courbe nodale. Les deux sections étant du degré quatre: $r = 4$.

On trouve facilement:

$$m = 4, \alpha = 0, v = 0, \omega = 0, G = 2.$$

Les plans tangents aux deux coniques en les points I et J sont des plans bitangents. En effet, si l'on mène d'un point R de la droite z les deux droites tangentes à la conique c_2 en les points Q_1 et Q_2 , et les deux droites tangentes à la conique d_2 en les points P_1 et P_2 , les deux cordes de contact $P_1 P_2$ et $Q_1 Q_2$ passeront par le point de la droite z , qui est en proportion harmonique avec le point R par rapport aux points I et J . Par conséquent, ces

quatre points P_1, P_2, Q_1, Q_2 , sont dans un plan. Il en est de même des quatre droites $l, P_1 Q_1, P_1 Q_2, P_2 Q_1, P_2 Q_2$.

Si le point R coïncide avec le point I , les deux cordes de contact deviendront les deux tangentes en I , et les quatre droites l coïncident deux à deux, la droite $P_1 Q_1$ avec la droite $P_2 Q_2$, et la droite $P_1 Q_2$ avec la droite $P_2 Q_1$. Dans le plan tangent aux deux coniques en le point I se trouvent, par conséquent, deux droites l le long desquelles ce plan est tangent à la développable, ou bien, ce plan est un plan bitangent. Il en est de même pour le plan tangent aux deux coniques c_2 et d_2 en le point J .

Pour les autres singularités on trouve les valeurs suivantes:

$$g = 2, n = 0, x = 4, y = 0, \beta = -8, h + H = 10, p = -1.$$

$n = 0$, donc, il n'y a pas d'arête de rebroussement.

Les formules de *Plücker* appliquées à la projection de l'arête de rebroussement n'ont plus aucune signification; donc; les singularités qu'on tire de ces formules n'ont plus aucune valeur. Les valeurs des singularités qu'on détermine en appliquant à une section plane de la surface O , les formules de *Plücker* sont bonnes. Donc les valeurs

$$g = 2, n = 0, x = 4, p = -1,$$

subsistent: il s'ensuit que la surface O se décompose en deux cônes du second degré, et qu'il n'y a pas de focale. Cependant, il y a une focale, savoir, la droite d'intersection des deux plans tangents aux deux coniques en les points I et J . Sur cette droite se trouvent encore deux foyers singuliers savoir les deux sommets des cônes qui forment ensemble la surface O .

Si les deux points de rencontre I et J coïncident, la surface O est un cône du second degré et tous les points de ce cône sont des foyers.

CHAPITRE IV.

FOCALE DE LA CUBIQUE PLANE SANS POINTS SINGULIERS.

§ 30. *Des intersections de la surface O avec les plans V et W .*
Soit la courbe d une cubique plane d_3 sans points singuliers, située dans le plan W . Les points de rencontre A_1, A_2 et A_3

avec le plan V sont des points ordinaires de la courbe d_3 et ne coïncident pas avec les points d'intersection I et J de la conique c_2 avec le plan W . Le plan V n'est pas tangent à la courbe d_3 et, par conséquent, ce n'est pas un plan o .

L'intersection de la surface O par le plan W consiste en la cubique d_3 , qui est une courbe nodale de la surface O et en les douze droites l_w , qui sont les tangentes, qu'on peut mener des points I et J , à la courbe d_3 . La section est du degré $2 \times 3 + 12 \times 1 = 18$.

La section de la surface O par le plan V , consiste en la conique c_2 , qui est une courbe sextuple, puisque par chaque point P de la conique c_2 il passe six droites l . En effet, soit R le point où la tangente à la conique c_2 en le point P rencontre la droite z , l'intersection des plans V et W . Du point R on peut mener six tangentes à la conique d_3 . Soient les points de contact les points $Q_1, Q_2, Q_3 \dots Q_6$; les droites $PQ_1, PQ_2 \dots PQ_6$ sont les droites l qui passent par le point P . Dans le plan V se trouvent encore six droites l_v , savoir les droites, tangentes à la conique c_2 , qu'on peut mener par les points A_1, A_2 et A_3 . La section est encore du degré $6 \times 2 + 6 \times 1 = 18$; donc: $r = 18$.

§ 31. *Détermination des quantités m et α .* La projection d'_3 de la courbe d_3 sur le plan V , étant de la sixième classe, il y a douze tangentes communes aux courbes d'_3 et c_2 ; donc: $m = 12$. (§ 12).

Nous avons vu au § 6 que les points α sont tous situés dans le plan V . Les points α sont des points de l'arête de rebroussement a et seront donc parmi les points de la courbe a situés sur la section de la surface O par le plan V . Ces points sont ceux, où les droites l_v touchent la courbe a ; on sait que ces points de contact sont les points S , où les droites l_v sont tangentes à la conique c_2 , et que sur l'arête de rebroussement ce sont des points stationnaires β et non pas des points α (§§ 19, 20, 21). Il reste à voir, si parmi les autres points de la courbe a , situés sur la conique c_2 , il y en ait encore, qui soient des points α .

Un point P de la conique c_2 sera un point de l'arête de rebroussement a , si parmi les six droites l , qui passent par ce point P , il y a deux consécutives. Pourque cela se fasse, il faut que des six points Q (§ 30) deux soient consécutifs. Les six points Q sont les points de contact des tangentes qu'on peut mener à la courbe d_3 par le point R . Deux de ces points de contact coïncident: 1° si le point R se trouve sur la courbe d_3 et en ce cas le point P est un point S ; 2° si le point R se trouve sur une des neuf tan-

gentes d'inflexion de la courbe d_3 . Comme par le point R , il passe deux tangentes à la conique c_2 , deux points P correspondent à un point R . Outre les points S , la courbe a et la conique c_2 ont donc dix-huit points de rencontre. Ces dix-huit points sont des points α . En effet, soient Q_1 et Q_2 deux points consécutifs de la courbe d_3 , pour lesquels la tangente reste la même, et soit R le point où cette tangente stationnaire $Q_1 Q_2$ rencontre la droite z ; soit P le point de contact d'une des deux droites qu'on peut mener par le point R , tangentes à la conique c_2 . Le plan σ tangent à la développable O le long de la génératrice $P Q_1$ est le plan $(P R Q_1)$; le plan σ tangent à la développable O le long de la génératrice $P Q_2$ est le plan $(P R Q_2)$. Les droites $R Q_1$ et $R Q_2$ coïncident, donc les deux plans σ consécutifs coïncident également, et le plan $(P R Q_1 Q_2)$ est un plan stationnaire α ; donc: $\alpha = 18$.

§ 32. *Détermination des nombres v , ω , G et H .* Nous avons vu aux §§ 16 et 17 que la surface O pourrait présenter une génératrice d'inflexion v , ou une génératrice double ω , si une des droites l_v ou l_ω était une droite double ou si la courbe d présentait un point double.

La courbe d étant ici une cubique sans point double, et les droites l_v et l_ω étant des droites simples, on aura: $v = 0$, $\omega = 0$.

Nous avons vu au § 15 que pour que la surface O puisse posséder un plan bitangent G , il faut satisfaire à une des conditions suivantes: 1° que le plan I' soit un plan σ , 2° que la courbe d possède une bitangente, 3° que les deux courbes d et c_2 se rencontrent.

La courbe d_3 ne satisfaisant à aucune de ces trois conditions nous aurons: $G = 0$.

La projection c'_2 de la conique c_2 sur le plan \mathcal{W} , d'un point H comme centre de projection est une conique, qui a, en deux points distincts, un contact de l'ordre deux avec la courbe d . Assujettir une conique à avoir deux contacts de l'ordre deux avec une courbe donnée d , c'est l'assujettir à quatre conditions. La conique c'_2 devant encore passer par les deux points I et J , elle doit satisfaire à six conditions. Une conique ne pouvant satisfaire qu'à cinq conditions il n'existera pas de conique c'_2 , ayant deux contacts de l'ordre deux avec la courbe d , sauf le cas où la courbe d ait une position particulière par rapport aux points I et J ; donc: $H = 0$.

On peut encore voir de la manière suivante qu'en général il

n'existe pas de coniques passant par les deux points I et J , et ayant en deux points distincts, un contact de l'ordre deux avec la cubique d_3 . En effet, si une conique a dans les points Q_1 et Q_2 un contact de l'ordre deux avec la cubique d_3 , les points Q_1 et Q_2 seront en ligne droite avec un des neuf points d'inflexion de la cubique d_3 . Et inversement, si l'on mène une droite quelconque par un des neuf points d'inflexion cette droite coupe la cubique dans deux autres points, qui seront des points de contact de l'ordre deux d'une seule conique.

Ces coniques forment, par conséquent, une infinité simple de coniques, donc parmi elles, il ne se trouvera pas une, qui puisse encore satisfaire aux deux conditions de passer par les deux points I et J .

§ 33. *Détermination des autres singularités.* Des formules de *Cayley-Plücker* on déduit facilement les formules suivantes qui expriment les singularités inconnues, n , x , g , h , y , β et p en fonction des singularités connues, r , m , α , v , ω , H et G .

$$\begin{aligned} n &= 3(r - m) + \alpha - v \\ x &= \frac{1}{2} \{ r(r - 10) + 8m - 3\alpha - 2\omega \} \\ g &= \frac{1}{2} \{ m(m - 1) - 3\alpha - r - 2G \} \\ p &= \frac{1}{2} \{ \alpha + r + 2 - 2m \} \\ y &= \frac{1}{2} \{ r(r - 4) - \alpha - 2v - 2\omega \} \\ \beta &= 6r + 3\alpha - 8m - 2v \\ h &= \frac{1}{2} \{ (3r - 3m + \alpha - v)^2 + 27m + 7v - 22r - 10\alpha - 2H \} \end{aligned}$$

Au lieu d'employer pour le calcul des singularités y , β et h les dernières trois formules, il est plus commode de calculer d'abord n et de se servir des trois formules suivantes:

$$\begin{aligned} y &= x + n - m \\ \beta &= \alpha + 2(n - m) \\ h &= \frac{1}{2} \{ n(n - 1) - r - 3\beta - 2H \}. \end{aligned}$$

On trouve les résultats suivants:

$$n = 36, x = 93, g = 30, y = 117, \beta = 66, h = 522 \text{ et } p = 7.$$

§ 34. *Des intersections de l'arête de rebroussement avec les plans V et W .* n étant 36, l'arête de rebroussement a de la développable O est une courbe du degré trente-six. Les points d'inter-

section de la courbe a avec le plan W sont les douze points où les tangentes l_w qu'on peut mener à la courbe d_3 des points I et J , touchent la courbe d_3 . Ces points sont des points stationnaires β (§ 21) de l'arête de rebroussement a et les tangentes en ces points à la courbe a étant les droites l_w , chaque point de contact compte pour trois intersections; ce qui donne $12 \times 3 = 36$ points communs de la courbe a et du plan W .

Les points d'intersections de la courbe a avec le plan V , sont les six points S et les dix huit points α . Chaque point S est un point stationnaire dont la tangente à la courbe a est une droite l_v qui est située dans le plan V ; par conséquent, un point S compte pour trois intersections. Chaque point α est un point ordinaire de la courbe a et la tangente à la courbe a en un tel point n'est pas située dans le plan V , donc, chaque point α compte pour une intersection. Ce qui donne $6 \times 3 + 18 \times 1 = 36$ points communs du plan V et de la courbe a .

§ 35. *Des intersections de la focale avec le plan W . $x = 93$,* par conséquent, la courbe nodale de la surface O est une courbe de l'ordre quatre-vingt-treize cette courbe nodale consiste en la focale et en les deux courbes d_3 et c_2 , cette dernière étant une courbe sextuple, doit compter pour $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ coniques doubles. Le degré n de la focale est donc $93 - 3 - 15 \times 2 = 60$.

Le plan W n'est pas un plan o tangent à la surface O donc, tous les points doubles de la section de la surface O par le plan W , sont des points des courbes doubles de la surface O . La section consiste en la courbe d_3 et en les douze droites l_w . Les douze droites l_w se coupent en les points I et J , par chacun desquels passent six droites l_w et encore en trente-six autres points, qui sont des points ordinaires de la focale. Chaque droite l_w est tangente à la courbe d_3 , le point de contact est un point multiple de la section, mais il est situé sur l'arête de rebroussement et sur la courbe nodale d_3 et il n'est pas un point de la focale. Chaque droite l_w étant une tangente à la cubique d_3 , doit encore rencontrer la courbe d_3 dans un autre point. Soit un tel point un point D . Par un point D il passent trois nappes de la surface O ; savoir: une nappe qui passe par la droite l_w et deux nappes qui passent par la cubique d_3 . Par conséquent, par un point D , il passe trois branches de la courbe nodale; la courbe d_3 est une de ces trois branches, les autres branches font partie de la focale. Donc un point D est un noeud H de la focale et doit compter pour deux intersections. Il y a douze points D , ce

qui donne vingt-quatre intersections, qui, avec les trente-six points d'intersection de deux droites l_w donnent les soixante points communs du plan W et de la focale.

§ 36. *Points d'intersection de la focale f avec le plan V .* Les six droites l_v se coupent en quinze points. Trois de ces points sont les points A_1 , A_2 et A_3 , donc il reste douze de ces points, qui sont situés sur la focale. Par chaque point de contact S d'une droite l_v et de la conique c_2 , il passe quatre branches de la focale, qui sont tangentes à la droite l_v .

En effet, par chaque point S passent sept nappes de la surface O , savoir: une qui passe par la droite l_v et six nappes qui passent par la conique c_2 . Par conséquent, par chaque point S il passe $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ branches de courbes doubles de la surface O . Parmi ces vingt-et-une branches il s'en trouve deux de l'arête de rebroussement a , le point S étant un point stationnaire de la courbe a , et la conique c_2 qui doit compter pour quinze branches de la courbe nodale; il reste $21 - 2 - 15 = 4$ branches qui sont branches de la focale.

Pour toutes les nappes de la surface O qui passent par le point S , le plan tangent o passe par la droite l_v , par conséquent, cette droite l_v est la tangente à toutes les branches de la courbe double, qui passent par ce point S . Le plan o , passant par la droite l_v , est le plan osculateur en le point S à chacune des quatre branches de la focale, qui passent par ce point S .

En effet, par le point A , où la droite l_v rencontre la cubique d_3 , on peut mener quatre droites, tangentes à la cubique d_3 en les points Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 . Les quatre droites SQ_1 , SQ_2 , SQ_3 et SQ_4 sont quatre génératrices ordinaires l , par lesquelles passent quatre nappes ordinaires n^I , n^{II} , n^{III} , n^{IV} . Les trois autres nappes qui doivent passer par le point S sont formées par les droites l consécutives à la droite l_v . Ces dernières trois nappes se coupent suivant les deux branches de l'arête de rebroussement et suivant la conique c_2 , et forment ensemble un système que je désignerai par la notation n_3 . Considérons l'intersection de la nappe triple n_3 avec une des quatre nappes simples, par exemple n^I . Cette nappe n^I rencontre deux des trois nappes, qui composent la nappe triple n_3 , suivant la conique c_2 et elle rencontre la troisième nappe du système n_3 suivant une branche de la focale. Une droite l consécutive de la droite l_v , tangente à la nappe n^I , doit rencontrer la nappe n^I deux fois; une fois sur la conique c_2 et une fois sur la focale. Le plan osculateur de la focale au point S est déterminé par la tangente en ce point, et par un point infiniment voisin; donc ce plan est

déterminé par la droite l_v et par un point de la droite l . Or comme cette droite l rencontre la droite l_v , ce plan osculateur est évidemment le plan des droites l_v et l , ou bien le plan o , tangent à la développable O .

Donc, un point S compte pour huit intersections de la focale f avec le plan V . Les six points S donnent avec les douze points de la focale, lesquels sont des intersections de deux droites l_v , $6 \times 8 + 12 = 60$ points communs, tel qu'il le faut.

§ 37. Au § 33 on a trouvé $\beta = 66$.

Les six points S sont des points β , les points où les douze droites l_w touchent la cubique d_3 sont également des points β . Donc il reste encore $66 - 12 - 6 = 48$ points β qui ne sont pas situés dans les plans V et W . Si l'on projette la conique c_2 sur le plan W , en prenant un de ces points β comme centre de projection, la projection c'_2 passera par les points I et J et aura un contact de l'ordre trois avec la cubique d_3 (§ 6).

Inversement, il correspond deux points β à toute conique c'_2 , qui passe par les points I et J et qui a un contact de l'ordre trois avec la cubique d_3 . Pour contrôler nous allons déterminer d'une autre manière le nombre de ces coniques c'_2 .

Une conique c''_2 passant par les points I et J et ayant un contact de l'ordre deux avec la cubique d_3 en le point B est complètement déterminé par le point B . Cette conique c''_2 coupe la cubique d_3 dans trois points U ; ces points U sont encore complètement déterminés par le point B . Entre les points B et U il existe une correspondance $(3, 15)$, ce que je vais démontrer.

En effet, nous venons de voir qu'il correspond trois points U à un point B . Pour déterminer le nombre des points B qui correspondent à un point U , il faut déterminer le nombre des coniques c''_2 , qui passent par un point U de la cubique d_3 et qui ont autre part un contact de l'ordre deux.

Pour que la projection c'_2 de la conique c_2 passe par le point U et ait un contact de l'ordre deux avec la cubique d_3 il faut que le point C , le centre de projection, soit situé sur le cône du second degré dont le point U est le sommet et dont la conique c_2 est la courbe de base, et que ce point C soit situé sur l'arête de rebroussement a . Ce cône (Uc_2) rencontre la courbe a en soixante-douze points dont trente-six sont situés sur la conique c_2 et six sur les deux droites l , qui passent par le point U , ces droites l étant des génératrices du cône et des tangentes à la courbe a , tandis que

les plans tangents au cône le long de ces génératrices sont des plans osculateurs o de la courbe a .

Par conséquent, il reste trente intersections qui seront des points C . A une conique c''_2 qui passe par le point U et qui a un contact de l'ordre deux avec la cubique d_3 il correspond deux centres de projection C , donc le nombre de ces coniques c''_2 est quinze. De là il résulte que la correspondance entre les points B et U est une correspondance (3,15). Dès qu'un des trois points U coïncide avec un point B la conique c''_2 est une conique c'_2 , qui a un contact de l'ordre trois avec la cubique d_3 . Il faut déterminer le nombre de ces coïncidences. En appliquant la formule pour le nombre des coïncidences d'une correspondance sur une courbe non-unicursale, (*Salmon-Fiedler*, Ebene Curven, page 426) on trouve, en y substituant $D = 1$, $k = 3$, $p = 1$, $\alpha = 3$, $\alpha' = 15$, $q = b = \beta = \beta' = 0$:

$$1 \times (a - 3 - 15) = 3.2.1 \\ a = 24.$$

Le nombre des coïncidences étant vingt-quatre, le nombre des coniques c'_2 est vingt-quatre aussi; donc, le nombre des points β , non situés dans un des plans V et W , est quarante-huit, ce qui est conforme au résultat trouvé au moyen des formules de *Cayley-Plücker*.

§ 38. Un point stationnaire de l'arête de rebroussement, non situé dans un des plan V ou W , sera indiqué par la notation β_1 . Au paragraphe précédent on a trouvé: $\beta_1 = 48$.

Tout point β étant aussi un point de la courbe nodale, (*Salmon* 3 D. p. 594) les points β_1 , qui ne sont pas situés sur les courbes d ou c_2 , doivent se trouver sur la focale. En projetant la conique c_2 sur le plan W d'un point β_1 comme centre de projection, la projection c'_2 aura un contact de l'ordre trois avec la courbe d . En projetant la conique c_2 sur le plan W d'un point ordinaire F de la focale, la projection c''_2 aura deux contacts de l'ordre un. Donc, si le centre de projection se meut sur la focale, les deux points de contact sont deux points consécutifs, dès que le centre arrive dans un point β_1 de l'arête de rebroussement. Les points de contact sont les points, où les deux droites l , qui passent par le point F de la focale, rencontrent la courbe d . Soit k la tangente à la focale en le point F , et R le point, où cette tangente k rencontre le plan V . Si l'on mène de ce point R , les deux tangentes à la conique c_2 , les deux points de contact étant P_1 et P_2 , les deux

droites FP_1 et FP_2 seront les deux droites l , qui passent, par le point F . Pour que ces deux droites l déviennent des droites consécutives, il faut que le point R soit un point de la conique c_2 . Alors les deux droites l , FP_1 et FP_2 coïncident avec la tangente k en le point F de la focale et ce point F est un point β_1 de la courbe a . La droite l passant par un point β_1 est la tangente à la courbe a en ce point, donc, la courbe f est tangente à la courbe a en chaque point β_1 . Et inversement: des qu'une tangente k à la focale en un point F non situé dans un des plans V ou W rencontre la conique c_2 , ce point F est un point stationnaire de la courbe a et la droite k est une droite l .

Il est facile de démontrer le théorème général: La courbe nodale d'une surface développable est tangente à l'arête de rebroussement a dans chaque point stationnaire de la courbe a . (*Cremona-Curtze*: Grundzüge einer allgemeinen théorie der Oberflächen: page 90).

§ 39. *Points singuliers de la focale.* Nous avons déjà vu (§ 35) que les points S de la conique c_2 sont des points quadruples de la focale et que les quatre branches qui passent par un point S ont la même tangente et même plan osculateur que la courbe a .

Déterminons maintenant les points singuliers de la focale non situés dans le plan V . La focale est l'intersection de deux nappes de la développable O . Elle présentera un point multiple, si les deux nappes se touchent ou si la focale rencontre une troisième nappe de la surface O .

Deux nappes de la surface O ne se touchent jamais puisqu'alors la surface O posséderait un plan bitangent et nous avons vu, que $G = 0$.

Si par un point passent trois nappes de la surface O ce point sera un point triple de la surface et par ce point passeront trois branches de la courbe double. Il y a plusieurs cas à considérer.

Les trois branches passant par le point triple appartiennent à la courbe nodale:

1°. Une de ces branches peut être la courbe d_3 ; les deux autres branches appartiennent à la focale. Ces points triples sont les points D , de la courbe d_3 , où elle est rencontrée par une des douze droites l_w ; ce qui donne douze noeuds de la focale;

2°. Les trois branches de la courbe nodale, qui passent par le point triple, appartiennent à la focale; alors si l'on prend ce point pour centre de projection, la projection c'_2 de la conique c_2 sur le plan W , aura trois contacts de l'ordre un avec la courbe d_3 .

Et inversement, dès qu'il y a une conique c'_2 qui passe par les points I et J et touche en trois points distincts la cubique d_3 , les deux sommets des cônes du second degré, qui passent par les coniques c_2 et c'_2 à la fois, seront des points triples de la focale.

Le nombre des coniques c'_2 passant par deux points fixes et touchant trois fois une cubique d_3 étant douze, (*Cremona-Curtze: Ebene Curven*, 1865 page 254), il existe vingt-quatre points triples sur la focale.

Des trois branches de courbes doubles passant par un point triple de la surface, une peut appartenir à l'arête de rebroussement. Ce cas se présente si l'arête de rebroussement rencontre une nappe de la surface O .

Soit L ce point de rencontre de la courbe a , par laquelle passent deux nappes n' et n'' , avec une troisième nappe n''' ; soit l_3 la génératrice de la nappe n''' qui passe par le point L . Les tangentes aux branches de la courbe focale seront les droites d'intersection du plan tangent à la nappe n''' le long de la droite l_3 avec les plans tangents aux nappes n' et n'' , dans le point L . Comme ces derniers deux plans tangents coïncident avec le plan osculateur de la courbe a en le point L , ces deux tangentes coïncident, par conséquent, le point L est un point stationnaire de la focale. On voit facilement que le plan osculateur en le point L ou $\underline{\beta}$ de la focale est le plan o passant par la droite l_3 .

Si l'on projette la conique c_2 sur le plan W , le point L étant le centre de projection, la projection c'_2 aura avec la courbe d_3 deux contacts, l'un de l'ordre deux, puisque le point L est un point ordinaire de la courbe a , et l'autre de l'ordre un, puisque par le point L passe la droite l_3 . Et, inversement à toute conique c'_2 , passant par les points I et J et ayant avec la courbe d_3 , deux contacts, l'un de l'ordre deux et l'autre de l'ordre un, il correspond deux points L , qui seront des points stationnaires de la focale.

Soit c''_2 une conique passant par les points I et J , laquelle a en un point P' un contact de l'ordre deux avec la courbe d_3 et passe par un point P de la courbe d_3 . La conique c''_2 rencontre la courbe d_3 en deux points P'' encore. Si le point P coïncide avec un point P'' la conique c''_2 devient une conique c'_2 .

Pour déterminer ce nombre de coïncidences, employons la formule: $p(a - \alpha - \alpha') + q(b - \beta - \beta') = k$. 2 D . (*Salmon-Fiedler, Ebene curven* 1882, page 426.)

La courbe Θ consiste ici en les quinze coniques c''_2 , qui passent par le point P (§ 37); on voit facilement qu'il faut substituer

$k = 15$ comme les quinze coniques c''_2 passent par le point P ; on a trouvé (§ 37) que le nombre de coïncidences α des points P et P' , est 24; $\alpha = 3$, $\alpha' = 15$, $\beta = \beta' = 15 \times 2$, $D = 1$; $p = 3$ puisque la conique c''_2 est osculatrice de la courbe d_3 , $q = 1$; ce qui donne: $3(24 - 3 - 15) + 1 \times (b - 30 - 30) = 15.2.1$ d'où le nombre des coïncidences $b = 72$.

Par conséquent, le nombre des points stationnaires $\underline{\beta} = 144$.

Si par un point triple de la courbe double passent deux branches de la courbe a , ce point est un noeud H ou un point β ; $H = 0$ et un point β donne un point ordinaire de la focale, donc de ce chef, il n'y a pas de singularités sur la focale.

§ 40. *Détermination de λ* : nombre des génératrices qui sont à la fois sécantes de la courbe a .

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'on obtient un point stationnaire $\underline{\beta}$ de la courbe nodale toutes les fois que par un point λ de la courbe a il passe une troisième génératrice l_3 . Par conséquent, on peut trouver le nombre des points $\underline{\beta}$ en déterminant le nombre λ .

La formule qui exprime λ en fonction des nombres connus, m , r , n , α , etc. est

$$\begin{aligned}
 \lambda &= n(r + 4) - 6(r + \beta) - 4(\omega + H) - 2v \\
 \lambda &= 36(18 + 4) - 6(18 + 66) - 4(0 + 0) - 2 \times 0 \\
 \lambda &= 288. (E. Pascal II Geometria p. 322).
 \end{aligned}$$

Pour trouver le nombre $\underline{\beta}$ des points stationnaires de la focale, il faut diminuer ce nombre λ par le nombre des points λ qui sont situés sur les deux autres courbes nodales.

Les points, où la courbe a rencontre la courbe d_3 , ne sont pas des points λ .

Chaque point S doit compter pour douze points λ . En effet, un point λ est un point d'intersection de la courbe a avec une nappe de la surface O .

Par un point S il passe quatre nappes de la surface O qui sont tangentes à la courbe a en ce point, tandis que ce point est un point stationnaire de la courbe. Dans les six points S se sont donc réunis $6 \times 12 = 72$ points λ .

Chaque point α de la conique c_2 compte pour quatre points λ puisque la courbe a y rencontre encore quatre nappes de la surface. Dans les dix-huit points α se sont réunis $18 \times 4 = 72$ points λ .

Il reste donc $288 - 72 - 72 = 144$ points λ qui ne sont pas sur les courbes d_3 et c_2 , et qui sont, par conséquent, des points

stationnaires $\underline{\beta}$ de la focale (§ 39) Remarquons que le plan osculateur en le point $\underline{\beta}$, de la focale est le plan o tangent à la développable O le long de la droite l_3 .

Remarque sur les formules pour λ , λ' et R . Les formules qui expriment les quantités λ , λ' et R en fonction des singularités ordinaires sont données par *E. Pascal*, II Geometria p. 322, et par *Salmon*, Geometry 3. D. p. 589.

J'ai compilé les démonstrations, qu'ont données de ces formules *Cremona* (voir: *Cremona-Curtze*, Oberflächen p. 81—95), *Salmon* (Geometry. 3. D. p. 580—600 ou Transactions R. I. Academy 1859) et *Cayley* (Complete Works Vol. VI). Dans ces démonstrations la surface considérée est supposée ne posséder que des courbes doubles. Dès que la surface possède une courbe triple les démonstrations tombent en défaut, puisqu' alors la courbe nodale est située en partie sur la deuxième polaire, par rapport à la surface considérée, un point quelconque étant le pôle.

Attendu que dans le cas dont il s'agit ici et dans la grande majorité des cas suivants, la conique c_2 est une courbe d'une multiplicité plus grande que deux, il est douteux que ces formules soient applicables. C'est pourquoi j'ai toujours dû contrôler les résultats, obtenus au moyen de ces formules. Sauf dans quelques cas, que je me propose de signaler plus tard, les résultats obtenus par ces formules sont d'accord avec ceux que j'ai trouvés en suivant une autre méthode.

§ 41. *Détermination de λ'* : nombre des plans o osculateurs de la courbe a , qui sont encore tangentes à la courbe a .

Soit l_1 la tangente à la courbe a en le point, où le plan λ' est osculateur. Soit l' la tangente à la courbe a en le point, où le plan λ' est tangent à la courbe a . Les deux nappes n_1 et n' de surface O qui passent par les deux génératrices l_1 et l' se coupent suivant une branche de la courbe nodale, à laquelle la droite l' est tangente. Soit l'' une génératrice infiniment voisine de la génératrice l' , qui rencontre la nappe n_1 dans deux points réels. Dans le plan ($l' l''$) qui est le plan tangent à la nappe n' se trouvent, par conséquent, quatre points de la courbe nodale, ou bien ce plan est un plan stationnaire de la courbe nodale.

On peut déterminer λ' au moyen de la formule suivante:

$$\begin{aligned}\lambda' &= m(r + 4) - 6(r + \alpha) - 4(\omega + G) - 2v \\ \lambda' &= 12(18 + 4) - 6(18 + 18) - 4(0 + 0) - 2 \times 0 \\ \lambda' &= 48. \text{ (E. Pascal II Geometria p. 322).}\end{aligned}$$

Par conséquent, il arrive quarante-huit fois qu'une génératrice l' située sur une nappe n' de la surface O , est tangente à une autre nappe n_1 .

Ou bien, il existe quarante-huit tangentes communes à la courbe a et à une nappe de la surface O .

Une génératrice l_v située sur la nappe triple n_3 est tangente en le point S aux quatre nappes simples qui passent par ce point S (§ 36). Comme le point S est le point, où la droite l_v est tangente à la courbe a , une droite l_v est tangente en le même point à la courbe a et à chacune des nappes simples.

Par conséquent, une génératrice l_v doit compter pour huit tangentes communes. Donc les quarante-huit tangentes communes sont les six droites l_v , et aucun des quarante-huits plans λ' n'est un plan stationnaire de la focale.

On peut s'assurer directement, qu'il n'existe pas de plans λ' qui soient des plans stationnaires α de la focale.

Supposons qu'il existe un plan λ' tangent à la surface O le long de la génératrice l_1 . Le plan λ' étant un plan o , doit être tangent à la conique c_2 en le point P_1 , où la droite l_1 rencontre la conique c_2 . La génératrice l' doit rencontrer la conique c_2 , donc elle doit également passer par le point P_1 . Le plan o tangent à la surface le long de la droite l' est le plan déterminé par la droite l' et par la tangente à la conique c_2 en le point P_1 ; donc, ce plan o est le plan λ' . Par conséquent, ce plan λ' serait un plan bitangent G ou un plan α et ce ne serait plus un plan λ' . Ce raisonnement tombe en défaut, si la génératrice l' coïncide avec la tangente à la conique c_2 , puisqu' alors ces deux droites ne déterminent plus un plan o . Donc les seuls plans λ' qui peuvent exister sont des plans o , passant par les droites l_v , ce qui s'accorde avec le résultat trouvé ci-dessus.

§ 42. *Détermination de l* : nombre des points de la focale situés sur chaque génératrice l .

Chaque génératrice d'une surface développable O , rencontrant la courbe nodale $r=4$ fois (*Salmon* 3 D. p. 297), une droite l rencontrera la courbe nodale quatorze fois. Une droite l rencontre une génératrice sur la courbe d_3 et cinq génératrices sur la conique c_2 ; donc elle rencontre encore huit génératrices en des points de la focale, d'où: $l=8$. Une droite l_w rencontre six autres droites l_v en des points de la focale et passe par un noeud de la focale, ce qui donne huit intersections.

Il existe des génératrices qui ont de commun avec la focale,

plus de huit points; par exemple: 1° une droite l_v rencontre huit branches de la focale dont elle touche quatre; 2° chacune des quatre droites l qui passent par un point S rencontre onze branches de la focale.

Théorème. Soient $F_1, F_2 \dots F_8$ les huit foyers, situés sur une droite l_1 , les foyers conjugués $F'_1, F'_2 \dots F'_8$ sont situés sur la droite l'_1 , qui passe par le même point Q de la cubique d_3 que la droite l_1 , et est également une génératrice de la surface O .

Démonstration. Menons un plan par le point Z et par la droite l_1 et soient v et w les droites d'intersections de ce plan avec les plans V et W . Deux foyers conjugués étant conjugués harmoniques par rapport au point Z et à la droite w (§ 8), les foyers $F'_1, F'_2 \dots F'_8$ seront situés sur une droite l'_1 , qui passe par le point Q , les droites l'_1 et l_1 étant conjuguées harmoniques, par rapport aux rayons w et QZ . La droite l'_1 rencontre aussi la conique c_2 , parce que le point Z est le pôle de la droite z par rapport à la conique c_2 . La droite l'_1 a de commun avec la surface O les huit foyers F' et le point Q , qui sont des points doubles, et encore son point de rencontre avec la conique c_2 , qui est un point sextuple. La droite l'_1 , ayant de commun avec la développable O , $8 \times 2 + 2 + 6 = 24$ points, est située tout entière sur la surface O , donc cette droite est une génératrice de la surface O .

Il en résulte encore que, si les deux droites l qui passent par un foyer F rencontrent la cubique d_3 dans les points Q_1 et Q_2 , les deux droites l qui passent par le foyer conjugué F' , passeront par les mêmes points Q_1 et Q_2 .

§ 43. *Discussion de y .* Un plan y est un plan, contenant deux droites l donc c'est un plan bitangent à la courbe a .

Le nombre y indique le nombre de ces plans passant par un point quelconque.

Les deux droites l qui sont situées dans un plan y se rencontrent dans un point de la courbe nodale de la surface O , par conséquent, il y a trois espèces de plans y .

1° les plans y_1 pour lesquels les deux droites l se rencontrent dans un point de la courbe d_3 ;

2° les plans y_2 pour lesquels les deux droites l se rencontrent dans un point de la conique c_2 ;

3° les plans y_3 pour lesquels les deux droites l se rencontrent dans un point de la focale.

$$y_1 = 9.$$

Démonstration. Soit B un point quelconque du plan V ; par ce point il passe d'abord le plan V , qui compte pour trois plans y_1 parce que, dans ce plan se trouvent trois couples de droites l qui se rencontrent dans les points A_1 , A_2 ou A_3 de la courbe d_3 . Soit Q un point quelconque de la cubique d_3 , soit R le point, où la tangente à la courbe d_3 en le point Q rencontre la droite z , et soient P_1 et P_2 les deux points de contact des tangentes à la conique c_2 qu'on peut mener par le point R . Le plan $(Q P_1 P_2)$ est le plan y_1 du point Q ; ce plan coupe le plan V suivant une droite passant par le point Z . Les plans y_1 qui passent par le point B doivent, par conséquent, passer par la droite BZ . Soit R^1 le pôle de la droite BZ , par rapport à la conique c_2 , et soit Q^1 un des points de contacts des six tangentes à la cubique d_3 qu'on peut mener par ce point R^1 . Les six plans $(B Z Q^1)$ seront encore des plans y_1 passant par le point B ; donc $y_1 = 3 + 6 = 9$.

$$y_2 = 48.$$

Démonstration. Soit B un point quelconque du plan W . Les six droites l_m qui passent par le point I donnent quinze couples de droites l , qui se rencontrent dans un point de la conique c_2 ; le plan W compte, par conséquent pour trente plans y_2 .

Soient Q_1 et Q_2 deux points de la cubique d_3 par lesquels passent deux droites l , qui se rencontrent dans un point P de la conique c_2 ; alors les tangentes à la cubique d_3 en les points Q_1 et Q_2 se rencontrent dans un point R de la droite z .

Soit v une droite passant par le point B , qui rencontre la courbe d_3 dans les points Q_1 , Q_2 , Q_3 et soient t_1 , t_2 , t_3 les tangentes à la cubique d_3 en ces points. Si la droite v est telle que deux des tangentes t_1 , t_2 , t_3 se rencontrent dans un point R de la droite z , il passera par la droite v deux plans y_2 , puisque du point R on peut mener deux droites tangentes à la conique c_2 . Le lieu des intersections de deux tangentes t est une courbe du degré neuf. (*J. C. Kluyver*: Nieuw Archief v. W. Deel XVII 1890). Donc, par le point B il passe encore $9 \times 2 = 18$ plans y_2 ; donc $y_2 = 30 + 18 = 48$.

Le nombre y étant 117, il reste pour le nombre y_3 des plans y , passant par un point et contenant deux droites l qui se rencontrent dans un point de la focale: $117 - 9 - 48 = 60$.

Dans le plan W sont situées douze droites l_m qui se rencontrent dans trente-six points de la focale, par conséquent, le plan W doit compter pour trente-six plans y_3 . Par un point B du plan W il passe donc encore vingt-quatre autres plans y_3 . Nous avons vu au § précédent, que si deux droites l_1 et l_2 , passant par les points

Q_1 et Q_2 de la cubique d_3 , se rencontrent dans un point F_1 de la focale, les deux droites l'_1 et l'_2 qui passent encore par les points Q_1 et Q_2 , se rencontrent dans le foyer F_2 conjugué. Les deux plans y_3 , $(Q_1 Q_2 F_1)$ et $(Q_1 Q_2 F_2)$ passent, par conséquent, par la même droite $Q_1 Q_2$ du plan W . Cette droite $Q_1 Q_2$ est la corde de contact des deux foyers conjugués F_1 et F_2 . Le nombre des plans y_3 , outre le plan W , passant par le point B , étant vingt-quatre, le nombre des cordes de contact passant par le point B est douze; donc: *Les cordes de contact (directrices), enveloppent une courbe de la douzième classe.* La droite z est une tangente sextuple de cette enveloppe.

Le plan V est un plan y_3 pour chacun des douze points de la focale situés sur deux droites l_v . Par un point quelconque du plan V il passe, par conséquent, encore quarante-huit plans y_3 , outre le plan V . Les droites d'intersection des plans y_3 avec le plan V enveloppent, par conséquent, une courbe de la quarante-huitième classe. Soient P_1 et P_2 les points, où un plan y_3 rencontre la conique c_2 , soient l_1 et l_2 les droites l dans ce plan et soit F leur point de rencontre. La tangente k à la focale en le point F est l'intersection des deux plans σ , qui touchent la surface O le long des droites l_1 et l_2 . Donc la tangente k rencontre le plan v dans le point d'intersection des tangentes à la conique c_2 en les points P_1 et P_2 , ou bien la droite k passe par le pôle de la droite $P_1 P_2$ par rapport à la conique c_2 . Les droites $P_1 P_2$ enveloppant une courbe e de la quarante-huitième classe, le lieu b des intersections avec le plan V des tangentes k à la focale est une courbe du degré quarante-huit. Le plan W comptant pour trente-six plans y_3 , la droite z est trente-six fois tangente à la courbe e , donc le point Z est un point multiple de la courbe b , par lequel passent trente-six branches de la courbe b , ce qui est conforme au résultat trouvé au § 9: que passent par le point Z les droites k tangentes à la focale en ses points ordinaires, situés dans le plan W .

§ 44. *Détermination de r : rang de la focale.* Considérons la développable K dont les génératrices sont les tangentes k à la focale. La section de cette surface K par le plan V consiste en une courbe b et en les six droites l_v , qui, comptent chacune pour quatre génératrices k , une droite l_v étant tangente aux quatre branches de la focale, qui passent par un point S .

La courbe b est de l'ordre quarante-huit. En effet, considérons une droite t tangente à la conique c_2 en le point P ; soit Q un point de la droite t par lequel passe une génératrice k . Une gén-

matrice k , tangente à la focale en le point F' , est l'intersection des deux plans o tangents à la surface O le long des deux droites l , qui se rencontrent au point F . Ces deux plans o coupent le plan V suivant deux droites, passant par le point Q et tangentes à la conique c_2 .

La droite t étant une des deux tangentes à la conique c_2 qu'on peut mener par le point Q , un des deux plans o dont la droite k est l'intersection, passe par la droite t . Par conséquent, il faut que le point F' , où la droite k est tangente à la focale soit situé sur une des droites l qui passent par le point P . Et inversement, les droites k , tangentes à la focale en les points F' , situés sur les six droites l , lesquelles passent par le point P , rencontrent toutes la tangente t . Sur toute droite l se trouvent huit points F' , (§ 42) et par un point P passent six droites l ; donc la droite t rencontre quarante-huit droites k , d'où il résulte que le courbe b est de l'ordre quarante-huit. Ce qui est conforme au résultat trouvé au § 43.

Pour contrôler déterminons le nombre des points d'intersection des courbes b et c_2 . Une droite k , étant l'intersection de deux plans o , ne peut rencontrer la conique c_2 que dans les deux cas suivants: 1° ces deux plans o passent par une même tangente t de la conique c_2 et alors la droite k doit être la tangente t ; 2° les deux plans o sont deux plans consécutifs et la droite k coïncide avec une droite l . Les droites l qui sont des droites k sont les quarante-huit droites l , qui sont tangents à la courbe a en les points stationnaires β_1 (§ 38). Les tangentes t qui sont des droites k sont les droites l_v , et les points de contact S sont des points de la courbe b . Par chacun des six points S , passent quatre branches de la courbe b . Un point S étant un point d'inflexion de chaque branche et la tangente d'inflexion étant la droite l_v , cela donne aux six points S , $6 \times 4 \times 2 = 48$ intersections. Nous avons donc quatre-vingt-seize intersections; d'où il suit que le degré de la courbe b est quarante-huit. L'intersection totale de la surface K avec le plan V est du degré $24 + 48 = 72$; donc: $r = 72$. Autrement.

On peut déterminer le rang R de la courbe nodale au moyen de la formule suivante

$$R = rm + 6r - 3n - 9m - 3v - 2G$$

$$R = 18.12 + 6.18 - 3.36 - 9.12 - 3.0 - 2.0.$$

$$R = 18(12 + 6 - 6 - 6) = 108; (E. Pascal II. p. 321).$$

Le rang de la courbe nodale d_3 étant six et celui de la conique

c_2 , qui étant courbe sextuple, doit compter quinze fois, étant trente, il reste pour le rang de la focale $108 - 6 - 30 = 72$; donc $\underline{r} = 72$.

§ 45. *Détermination de \underline{m} , la classe de la focale.* Déterminons le nombre des plans \underline{o} osculateurs à la focale et tangents à la conique c_2 ; ce nombre sera le double de \underline{m} . Par chaque droite k , excepté les droites l_n , il passe deux plans tangents à la conique c_2 , ces plans sont des plans \underline{o} . Si donc le plan \underline{o} passant par une droite k , est tangente à la conique c_2 , ce plan \underline{o} coïncide avec un plan \underline{o} . Nous avons vu au § 36 que le plan osculateur \underline{o} en un point S d'une branche de la focale, est le plan \underline{o} passant par une droite l_n . Donc, tous les plans \underline{o} tangents à la conique c_2 sont des plans \underline{o} . Ces plans seront:

1° les plans $\underline{\alpha}$; en effet, dans un plan $\underline{\alpha}$ se trouvent trois droites l consécutives; si ces trois droites coupent une nappe de la surface O , les trois points d'intersection seront trois points consécutifs de la focale; ce plan $\underline{\alpha}$ est donc un plan \underline{o} pour chaque intersection de la droite l , du plan $\underline{\alpha}$, avec la focale. Au § 42 nous avons vu que ce nombre d'intersections l est huit; donc, tout plan $\underline{\alpha}$ compte pour huit plans \underline{o} et les dix-huit plans $\underline{\alpha}$ comptent pour $18 \times 8 = 144$ plans \underline{o} , tangents à la conique c_2 (voir Cremona-Curtze: Oberflächen p. 13).

2° Nous avons vu au §§ 39 et 40 que le plan osculateur à la focale en un point $\underline{\beta}$ est un plan \underline{o} ; le nombre des points $\underline{\beta}$ étant 144, cela donne encore cent quarante-quatre plans \underline{o} tangents à la conique c_2 .

3° Chaque plan osculateur \underline{o} en un point S d'une branche de la focale doit compter pour trois plans tangents communs à la conique c_2 et à la développable K puisque la conique c_2 et la focale se touchent au point S . Cela est facile à vérifier en considérant les polaires réciproques. Il y a six points S par chacun desquels il passe quatre branches de la focale, ce qui donne $6 \times 4 \times 3 = 72$ plans \underline{o} tangents à la conique c_2 . En tout le nombre des plans tangents communs à la conique c_2 et à la développable K est $144 + 144 + 72 = 360$; donc: $\underline{m} = 180$. Le plan \underline{V} n'est pas un plan \underline{o} , donc la courbe d'intersection de la surface K avec le plan \underline{V} est aussi de la classe \underline{m} ; donc la courbe b est aussi de la classe cent quatre-vingts, ce qu'on avait aussi pu trouver en déterminant les tangentes communes aux deux courbes b et c_2 .

§ 46. *Détermination de \underline{v} et de $\underline{\omega}$.* En général, $\underline{v} = 0$, en effet, supposons que trois foyers F_1 , F_2 et F_3 consécutifs, soient

en ligne droite. Par chacun des éléments de la focale $F_1 F_2$ et $F_2 F_3$ il passe deux plans σ , donc par la droite $F_1 F_2 F_3$ il passe quatre plans σ . Ce cas ne peut se présenter que lorsque les quatre plans σ coïncident deux à deux, donc que la droite $F_1 F_2 F_3$ est l'intersection de deux plans α , ou que la droite $F_1 F_2 F_4$ est une droite l_v . En général les deux droites l le long desquelles deux plans α sont osculateurs à la surface O , ne se rencontrent pas. Les droites l_v sont des génératrices doubles de la surface K , il est vrai, mais ce sont des droites ω ; donc $\underline{v} = 0$.

Par une droite ω ; qui touche la focale en les poits F_1 et F_2 il passe quatre plans σ , savoir: les plans σ qui sont tangents à la surface O le long des deux couples de droites l , qui se rencontrent aux points F_1 et F_2 . Par une droite non tangente à la conique c_2 , il ne passe jamais plus de deux plans tangents à la conique c_2 . Ces quatre plans σ doivent, par conséquent, coïncider deux à deux; donc la droite ω doit être l'intersection de deux plans G et il faudrait encore que les deux droites l , le long desquelles l'un des deux plans G est tangent, rencontrent les deux droites l , le long desquelles l'autre plan G est tangent à la surface O . Cette singularité ne se présente que pour des positions très particulières de la courbe d ; donc, les seules droites qui peuvent donner des droites ω sont les droites k , tangentes à la conique c_2 . Les droites k tangentes à la conique c_2 sont les six droites l_v , qui étant chacune tangente à quatre branches de la focale sont des droites k multiples. Une droite l_v étant tangente à six couples de branches doit compter pour six droites ω . Les deux points, où une droite l_v touche les branches de la focale coïncident, les deux plans σ tangents à la surface K le long de la génératrice l_v coïncident également, par conséquent, chacune des six droites ω , qui se confondent dans une seule droite l_v , doit compter double dans les formules de *Cayley-Plücker*.

En effet, si d'une droite ω les deux points de contact et les deux plans osculateurs coïncident, la projection de la courbe aussi bien que la section de la développable, possèdera deux branches qui se touchent; par conséquent $\underline{\omega} = 72$.

Une fois les quantités $\underline{n} = 60$, $\underline{r} = 72$, $\underline{m} = 180$, $\underline{\beta} = 144$, $\underline{v} = 0$, $\underline{\omega} = 72$ connues, on peut au moyen des formules de *Cayley-Plücker* déterminer les singularités $\underline{\alpha}$, \underline{x} , \underline{y} , $\underline{h} + \underline{H}$, $\underline{g} + \underline{G}$, et \underline{p} .

On trouve les valeurs: $\underline{x} + \underline{\omega} = 2376$, $\underline{y} + \underline{\omega} = 2256$, $\underline{z} = 384$, $\underline{g} + \underline{G} = 15498$, $\underline{h} + \underline{H} = 1518$, $\underline{p} = 19$.

§ 47. La projection f' de la focale sur le plan W , le point Z

étant le centre de projection, est une courbe du degré trente, puisque deux foyers conjugués sont toujours en ligne droite avec le point Z (§ 8); donc $\underline{\mu}' = 30$. Pour la même raison le nombre des points stationnaires de la projection f' sera la moitié du nombre $\underline{\beta}$ donc $\underline{\nu}' = 72$.

La classe de la projection est la moitié du nombre des droites k , que rencontre une droite n quelconque passant par le centre de projection Z , puisque les tangentes k à la focale soit situées deux à deux dans des plans passant par le point Z . Toutefois il faut faire attention à ce que la projection d'une droite k passant par le point Z n'est pas une tangente à la courbe f' . Par le point Z il passe trente-six droites k , savoir les tangentes à la focale en les trente-six points d'intersections de deux droites l_w (§ 9). La droite n rencontre donc trente-six droites k , qui se projettent en dix-huit tangentes à la courbe f' ; donc: $\underline{\nu}' = 18$.

Au moyen des formules de *Pfücker* on trouve alors: $\underline{\delta}' = 318$, $\underline{\tau}' = 84$, $\underline{\iota}' = 36$, $\underline{\rho}' = 16$.

Pour vérifier, déterminons le nombre $\underline{\iota}'$ d'une autre manière. Par chaque point de l'espace, il passe cent quatre-vingts plans o , m étant cent quatre-vingts. Par le point Z , il passe trente-six droites \underline{k} , et les plans o , tangents le long de ces droites, sont des plans stationnaires $\underline{\alpha}$. (§ 9).

Par le point Z il passe, par conséquent, hors des trente-six plans $\underline{\alpha}$, soixante-douze plans o , qui coïncident deux à deux (§ 8); donc, $\underline{\iota}' = 36$.

§ 48. *Section s de la surface K par le plan W .* La focale n'étant pas tangente au plan W (§ 35) il n'y a pas de droites k , qui fassent partie de la section s . On a vu (§ 8), que la section s est une courbe nodale de la surface K , donc la section s est du degré trente-six, r étant soixante-douze, (§ 44); $\underline{\mu}'' = 36$.

Par chaque point du plan W il passe cent quatre-vingts plans o , m étant cent quatre-vingts (§ 45). Deux plans osculateurs à la focale, en deux foyers conjugués, se coupent suivant une droite située dans le plan W (§ 8); donc, la classe de la section s est quatre-vingt-dix: $\underline{\nu}'' = 90$.

Pour obtenir les points stationnaires de la section s , il faut considérer les points où la focale et ses tangentes stationnaires, rencontrent le plan W . On a vu que $v = 0$ (§ 46), donc il ne reste qu'à considérer les intersections du plan W avec la focale (§ 35). Les points de la focale où se rencontrent deux droites l_w sont des points $\underline{\alpha}$ de la focale (§ 9), et on voit facilement, que ces points

sont des points ordinaires de la section \underline{s} . La focale rencontre encore le plan \mathcal{W} aux points \underline{D} , qui sont des noeuds \underline{H} de la focale. Ces points \underline{D} sont des points quadruples de la courbe nodale de la développable \underline{K} et les quatre branches de cette courbe nodale, passant par un point \underline{D} , sont tangentes à une même droite: l'intersection des plans osculateurs aux deux branches de la focale en le point \underline{D} , (*Cremona-Curtze: Oberflächen* p. 88). Cette droite d'intersection est située dans le plan \mathcal{W} , parce qu'elle est l'intersection de deux plans \underline{o} osculateurs en les deux foyers conjugués, qui coïncident au point \underline{D} . Un point \underline{D} est donc un point stationnaire de la section \underline{s} et est encore un point stationnaire de la partie restante de la courbe nodale et compte pour trois intersections de cette courbe nodale avec le plan \mathcal{W} . Le nombre des points \underline{D} étant douze, $\underline{x}'' = 12$.

De ces valeurs $\underline{\mu}'' = 36$, $\underline{\nu}'' = 90$, $\underline{x}'' = 12$ on tire $\underline{\delta}' = 567$, $\underline{i}'' = 174$, $\underline{\tau}'' = 3726$, $\underline{p}'' = 16$.

Pour vérifier, déterminons d'une autre manière les valeurs de \underline{i}'' et de $\underline{\delta}''$.

Par chaque tangente stationnaire \underline{i}'' de la section \underline{s} , il passe deux plans stationnaires \underline{a} conjugués. On a trouvé $\underline{a} = 384$ (§ 46), dont trente-six sont osculateurs à la focale en les points \underline{a} situés dans le plan \mathcal{W} (§ 9). Ces trente-six plans \underline{a} coupent le plan \mathcal{W} suivant des tangentes ordinaires de la section \underline{s} . Les 348 plans \underline{a} restants donnent 174 tangentes stationnaires de la section \underline{s} , donc: $\underline{i}'' = 174$.

Le degré de la courbe nodale \underline{x} est 2304 parce que $\underline{x} + \underline{\omega} = 2376$ et $\underline{\omega} = 72$, (§ 46). La courbe nodale \underline{x} se décompose en la section \underline{s} du degré trente-six et en une courbe restante $\underline{\xi}$ du degré 2268. Cette courbe nodale $\underline{\xi}$ rencontre le plan \mathcal{W} trois fois dans chaque point \underline{D} (voir si-dessus). Elle possède douze branches, qui passent par chaque point \underline{A} , parce que les quatre nappes de la surface \underline{K} qui passent par une droite \underline{l}_v rencontrent, au point \underline{A} , quatre autres nappes passant par une seconde droite \underline{l}_v . Par chaque point \underline{A} il passe, par conséquent, seize branches de la courbe nodale \underline{x} , quatre de ces branches appartiennent à la section \underline{s} , donc il reste encore douze pour la courbe $\underline{\xi}$.

Toutes les seize branches de la courbe nodale étant tangentes à la courbe \underline{d}_3 en le point \underline{A} (§ 36), un point \underline{A} compte pour vingt-quatre intersections du plan \mathcal{W} avec la courbe nodale $\underline{\xi}$.

Les trente-six plans doubles \underline{G} , qui passent par le point \underline{Z} (§ 47), sont tangentes à la section \underline{s} en des points, où se touchent deux nappes de la surface \underline{K} . Par chacun de ces points de contact, il passe,

outre la courbe \underline{s} , une branche de la courbe nodale ξ , ce qui donne encore trente-six intersections de la courbe nodale ξ avec le plan W . Le nombre des intersections restantes de la courbe ξ avec le plan W est, par conséquent: $2268 - 12 \times 3 - 3 \times 24 - 36 = 2124$. Par chaque noeud de la section \underline{s} , il passe quatre nappes de la surface K ; donc, par un noeud de la section \underline{s} il passe quatre branches de la courbe nodale ξ , ce qui donne pour le nombre des noeuds de la section \underline{s} : 531. Par un point A , il passe quatre branches de la courbe \underline{s} qui en ce point ont la même tangente, ce qui donne encore trente-six noeuds de la courbe \underline{s} , donc $\underline{\mathcal{J}}'' = 531 + 36 = 567$, résultat conforme à celui que nous avons trouvé au moyen des formules de *Plücker*.

Il est impossible de déduire la valeur de τ'' du nombre $\underline{g} + \underline{G}$, parce que toute tangente à la section \underline{s} est située dans deux plans \underline{o} ; d'où il suit, que pour le plan W , $\underline{g} + \underline{G} = \infty$.

§ 49. *Section de la surface K par le plan V .* On a vu que cette section consiste en les six droites \underline{l}_v et en la courbe \underline{b} qui est du degré quarante-huit (§ 44). La courbe \underline{b} est de la même classe que la focale parce que le plan V n'est pas un plan \underline{o} , donc elle est de la classe 180 (§ 45).

Pour obtenir les points stationnaires de la courbe \underline{b} , on considère les points où la focale rencontre le plan V . Ces points sont les points S , et les douze points B , où se rencontrent deux droites \underline{l}_v . Ces derniers seuls donnent des points stationnaires de la courbe \underline{b} , tandis que les quatre branches de la focale, qui passent par un point S , donnent quatre points d'inflexion de la courbe \underline{b} , les quatre branches de la focale étant tangentes au plan V (§ 36), donc $\varkappa'' = 12$.

Des valeurs $\mu'' = 48$, $\nu'' = 180$, $\varkappa'' = 12$ on tire, au moyen des formules de *Plücker*: $\iota'' = 408$, $\mathcal{J}'' = 1020$, $\tau'' = 15474$, $\rho'' = 49$.

Pour vérifier, déterminons d'une autre manière les valeurs de ι'' et de \mathcal{J}'' .

Les tangentes d'inflexion de la courbe \underline{b} sont les droites d'intersection du plan V avec les 384 plans $\underline{\alpha}$ (§ 46), et les six droites \underline{l}_v . Chaque droite \underline{l}_v , étant tangente à quatre branches de la focale, est quatre fois une tangente d'inflexion de la courbe \underline{b} ; donc, $\iota'' = 384 + 6 \times 4 = 408$.

La courbe nodale x de la surface K étant du degré 2304, la section de la surface \bar{K} , par le plan V , aura 2304 noeuds. Ces noeuds seront: 1° les noeuds de la courbe \underline{b} , 2° les points

d'intersection de la courbe b avec une droite l_v et 3° les points d'intersection de deux droites l_v . Par chaque point A il passe seize branches de la courbe x (§ 48). Par chaque point de rencontre B de deux droites l_v , il passe dix nappes de la surface K , savoir: quatre passant par chacune des deux droites l_v et deux passant par la focale. Par chacun des douze points B il passe, par conséquent, trente-deux branches de la courbe nodale x .

Par chaque point S il passe quatre branches de la focale, qui ont la même tangente et le même plan osculateur (§ 36). Considérons deux surfaces développables dont les arêtes de rebroussement ont en un point commun la même tangente t et le même plan osculateur o . La courbe d'intersection de ces deux surfaces consiste, 1° en la tangente commune t , comptée deux fois, 2° en trois branches, qui touchent cette tangente commune t , et 3° en deux branches ayant une même tangente, située dans le plan o mais distincte de la tangente t . Pour mieux nous représenter cette intersection, prenons comme origine des coordonnées rectangulaires le point commun aux arêtes de rebroussement. Soit l'axe des x , la tangente t , soit le plan xz le plan osculateur o , et soient les deux arêtes de rebroussement symétriques par rapport au plan yz . Ce plan yz coupera les deux surfaces développables suivant la même courbe, qui a un point stationnaire à l'origine; donc, la courbe d'intersection des deux développables aura deux branches (formant un rebroussement) tangentes à l'axe des z . En considérant deux sections, parallèles au plan yz , situées de part et d'autre de ce plan, à des distances suffisamment petites, on voit dans chacune des deux sections trois points de la courbe d'intersection, situés tous les six du même côté du plan xy ; donc, la courbe d'intersection possède trois branches tangentes au plan xy . Les tangentes à ces trois branches doivent se trouver dans le plan xz tangent aux deux développables, donc l'axe des x est la tangente commune à ces trois branches de la courbe d'intersection.

Il s'ensuit de ce qui précède, que par chaque point S il passe six fois trois branches de la courbe x tangentes à la droite l_v et que ce point S est encore six fois un point stationnaire de la courbe x ; donc, chaque point S compte pour quarante-huit intersections du plan V avec la courbe x .

Chaque droite l_v rencontre encore les vingt-huit droites k , qui sont tangentes à la focale en ses points d'intersection avec les quatre droites l ordinaires, qui passent par le point S , où la droite l_v touche la conique c_2 (§ 44). Par chacun de ces vingt-huit points, où une droite l_v rencontre encore la courbe b , il passe quatre

branches de la courbe x , parce que en un tel point, les quatre nappes, passant par la droite l_v , rencontrent la nappe, passant par la droite k .

Le nombre des intersections des courbes b et x non-situées sur une des droites l_v , est, par conséquent: $2304 - \bar{3} \times 16 - 12 \times 32 - 6 \times 48 - 6 \times 28 \times 4 = 912$, ce qui donne 912 noeuds de la courbe b en dehors des points S . En chaque point S , une droite l_v est tangente d'inflexion de quatre branches de la courbe b , d'où il résulte, que chaque point S doit compter pour dix-huit noeuds de la courbe b . Le nombre total des noeuds de la courbe b est donc: $912 + 6 \times 18 = 1020$, résultat conforme à que celui, nous avons trouvé au moyen des formules de *Plücker*.

Remarquons encore, que par le point Z il passe trente-six branches de la courbe b et que le point Z est un point d'inflexion de chacune de ces trente-six branches (§ 47).

CHAPITRE V.

FOCALES DE QUELQUES COURBES RATIONNELLES.

Section I.

Focale de la cubique de la quatrième classe.

§ 50. *Des droites ω .* La courbe d_3 étant de la quatrième classe, elle possède un noeud δ . Examinons, si la présence d'un noeud δ fournit en effet une droite ω de la surface O (§ 17). Soient t_1 et t_2 les deux droites tangentes aux branches b_1 et b_2 de la courbe d_3 , en le point δ ; soient R_1 et R_2 les deux points, où ces tangentes rencontrent la droite z . Si les droites polaires des points R_1 et R_2 , par rapport à la conique c_2 , rencontrent cette conique en les points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 , les droites δP_1 , δP_2 , δP_3 et δP_4 seront des droites l et seront les seules droites l , qui passent par le point δ . Par chacune de ces quatre droites l , il ne passe qu'une seule nappe de la surface O . En effet, supposons qu'une de ces quatre droites, par exemple la droite δP_1 , soit une droite ω . Les deux plans o tangents à la surface O , le long de la droite ω , doivent passer tous les deux par la tangente à la conique c_2 en le point P_1 ; donc, ces deux plans o doivent coïncider. Alors devront coïncider également les deux tangentes en le point δ aux intersections avec le plan W des deux nappes, qui passent

par la droite ω ; par conséquent, les deux nappes de la surface O , qui passent par la droite ω , doivent passer par la même branche b_1 de la courbe d_3 , tangente à la droite t_1 . Pour que les deux nappes, passant par la branche b_1 , se coupent encore suivant une droite l qui passe par le point δ , il faut que la tangente t_1 rencontre la conique c_2 , s'il en était ainsi cette droite t_1 serait une droite l_w simple et le noeud δ serait un point β (§ 21). D'où il résulte que la présence d'un noeud δ ne fournit pas nécessairement une droite ω de la surface O . Or, si la droite δP_1 coïncide avec la tangente à la conique c_2 en le point P_1 il se pourrait que le noeud δ de la courbe d fournisse une droite ω , puisqu' alors on ne peut pas arriver à la conclusion que les deux plans σ doivent coïncider. Si la droite δP_1 coïncide avec la tangente en le point P à la conique c_2 , le noeud δ se trouve dans le plan V et on verra dans un des chapitres suivants qu'à cette condition, le noeud δ fournira deux droites ω .

Le raisonnement précédent tombe encore en défaut si les branches b_1 et b_2 sont tangentes à une même droite t_1 , puisqu' alors il se pourrait que les deux nappes, passant par la droite ω , coupent le plan W suivant les branches b_1 et b_2 .

Nous verrons dans un chapitre suivant que la présence sur la courbe d , de deux branches qui se touchent (singularité qui équivaut à deux noeuds ordinaires) donne lieu à deux droites ω de la surface O . On peut encore trouver de la manière suivante les conditions sous lesquelles des quatre droites l , passant par un noeud δ de la courbe d , il en coïncide deux, de manière à former une droite ω .

Deux de ces droites coïncident si, des quatre points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 situées sur la conique c_2 , deux se confondent.

Ce qui arrive: 1° si une des tangentes t_1 ou t_2 rencontre la conique c_2 ; toutefois les droites coïncidentes seront deux droites consécutives et ne formeront pas de droite ω ; 2° si les deux points R_1 et R_2 coïncident. Ces deux points R_1 et R_2 coïncident: 1° si les deux tangentes t_1 et t_2 coïncident, 2° si le point de rencontre de ces deux tangentes, savoir le noeud δ se trouve dans le plan V .

Si la courbe d est une cubique de la quatrième classe n'occupant pas de position particulière, elle n'a pas deux branches, qui ont la même tangente en un point commun et le noeud ne sera pas situé dans le plan V ; donc la surface O n'aura pas de génératrice double ω , ou $\omega = 0$.

§ 51. *Détermination des singularités de la développable O .* La section de la surface O par le plan W consiste en la cubique d_3 ,

qui est une courbe nodale et en les deux fois quatre droites l_w , tangentes à la cubique d_3 , qu'on peut mener par les points I et J ; donc: $r = 2 \times 3 + 2 \times 4 = 14$.

La section de la surface O par le plan V consiste en la conique c_2 , qui est une courbe quadruple, et en les trois fois deux droites l_v , tangentes à la conique c_2 , qu'on peut mener des points A_1 , A_2 et A_3 , où la courbe d_3 rencontre le droite z ; donc:

$$r = 4 \times 2 + 3 \times 2 = 14.$$

On trouve facilement:

$$m = 8, \alpha = 6, v = 0, H = 0, G = 0. (\S\S 31, 32).$$

De ces valeurs $m = 8, \alpha = 6, r = 14, v = 0, \omega = 0, H = 0, G = 0$ on tire, au moyen des formules données au § 33, $n = 24, x = 51, y = 67, \beta = 38, h = 212, g = 12, R = 52, p = 3$.

Les intersections de l'arête de rebroussement a avec le plan W , sont les points, où les huit droites l_w touchent la cubique d_3 . Ces points sont des points stationnaires β et comptent pour trois intersections chacun (§ 21), ce qui donne vingt-quatre intersections. Les vingt-quatre intersections de la courbe a avec le plan V sont: 1° les six points α ; 2° les six points S , où les droites l_v touchent la conique c_2 ; ces points sont encore des points β et comptent pour trois intersections chacun (§ 21).

Le degré de la cubique nodale est trois; la conique c_2 , étant une courbe quadruple, est une courbe nodale du degré douze. Il reste pour le degré de la focale:

$$\underline{n} = 51 - 3 - 12 = 36.$$

Les trente-six intersections de la focale avec le plan W sont: 1° les seize points, où les droites l_w , passant par le point I , rencontrent les quatre droites l_w , passant par le point J ;

2° les huit points D , où les tangentes l_w rencontrent encore la cubique; ces points sont des noeuds de la focale;

3° le noeud δ de la cubique; par ce point il passe deux branches de la courbe nodale d_3 ; donc, par ce point il passe quatre nappes de la surface; par un point quadruple de la surface O il passe six branches de courbes doubles; donc, il passe par ce point quatre branches de la focale.

Les intersections de la focale avec le plan V sont:

1° les douze points. outre les points A , où se rencontrent les droites l_v ;

2° les six points S . par chacun desquels il passe deux branches de la focale, qui y touchent la droite l_v (§ 36).

On trouve facilement: $y_1 = 7$, $y_2 = 24$; donc il reste $y_3 = y - y_1 - y_2 = 57 - 7 - 24 = 36$ (§ 43).

Le plan W est un plan y_3 pour chacun des seize points de la focale, où se rencontrent deux droites l_w ; en outre il passe par un point quelconque du plan W vingt plans y_3 . Donc les cordes de contact (directrices) enveloppent une courbe de la dixième classe (§ 43).

Le plan V compte pour douze plans y_3 , à cause des douze couples de droites l_v , qui se rencontrent dans des points de la focale; donc, les intersections des plans y_3 avec le plan V enveloppent une courbe de la vingt-quatrième classe. Le lieu des pôles de ces intersections (par rapport à la conique c_2), ou bien le lieu des intersections avec le plan V des tangentes k à la focale, ou bien encore la courbe b est du degré vingt-quatre.

Les points de contact des huit droites l_w avec la cubique d_3 et les six points de contact S des droites l_v avec la conique c_2 sont des points stationnaires β ; donc il reste $\beta - 8 - 6 = 38 - 8 - 6 = 24$ points β_1 , situés sur la focale.

Chaque droite l rencontre $r - 4 = 14 - 4 = 10$ autres droites l non consécutives, dont une sur la cubique d_3 et trois sur la conique c_2 ; donc chaque droite l rencontre la focale six fois; $l = 6$.

§ 52. *Détermination de r .* Le rang de la courbe nodale d_3 étant quatre et celui de la courbe quadruple c_2 étant douze, il reste pour le rang de la focale $52 - 4 - 12 = 36$; donc $r = 36$.

Autrement: considérons la développable K dont les génératrices k sont tangentes à la focale. La section de cette surface K par le plan V , consiste en les six droites l_v et en une courbe restante b . Cette courbe est, comme on l'a vu au § précédent, du degré vingt-quatre. On peut s'en assurer encore en déterminant le nombre des points de la courbe b sur une tangente quelconque de la conique c_2 . Cette tangente rencontre la courbe b vingt-quatre fois, puisque, par son point de contact avec la conique c_2 , il passe

quatre droites l sur chacune desquelles se trouvent six points de la focale (§ 44).

Les points de rencontre des courbes b et c_2 sont:

- 1° les six points S , où la courbe b touche deux fois la conique c_2 ;
- 2° les vingt-quatre points, où les tangentes à la focale en les points β_1 rencontrent la conique c_2 .

La section de la surface K par le plan V , étant composée de la courbe b du degré vingt-quatre et des six droites l_v qui sont des génératrices doubles ω , est du degré trente-six, donc, $\underline{r} = 36$.

$$\lambda = n(r + 4) - 6(r + \beta) - 4(\omega + H) - 2v$$

$$\lambda = 24(14 + 4) - 6(14 + 38) - 4(0 + 0) - 2 \times 0$$

$$\lambda = 120.$$

Les points α et S comptent pour $6 \times 2 + 6 \times 2 \times 3 = 48$ intersections de la courbe a avec une nappe de la surface O ; donc, il reste encore $120 - 48 = 72$ points stationnaires $\underline{\beta}$ sur la focale; donc: $\underline{\beta} = 72$.

Détermination de \underline{m} et de $\underline{\beta}$. La classe \underline{m} de la développable K sera la moitié du nombre de ses plans tangents \underline{o} , qui sont également tangents à la conique c_2 . Ces plans tangents communs sont:

- 1° les six plans α , qui comptent chacun pour six plans \underline{o} , l étant six;
- 2° les six plans o , passant par les droites l_v ; ces plans sont aussi des plans \underline{o} (§ 36) et comptent chacun pour six plans tangents communs (§ 45);

- 3° les plans \underline{o} des points $\underline{\beta}$, ce qui donne la relation:

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \{6 \times 6 + 6 \times 6 + \underline{\beta}\}. \quad (\text{A}).$$

Des formules de *Cayley-Plücker* on tire:

$$\underline{\beta} = 3(\underline{n} - \underline{r}) + \underline{m} + \underline{v}. \quad (\text{B}).$$

On a vu au § 46 que $\underline{v} = 0$ et on vient de trouver $\underline{n} = 36$, $\underline{r} = 36$. En substituant ces valeurs dans la relation B, celle ci devient:

$$\underline{\beta} = 3(36 - 36) + \underline{m} + 0 \quad (\text{C}).$$

Des formules A et C il s'ensuit $\underline{m} = \underline{\beta} = 72$.

Des valeurs $\underline{n} = 36$, $\underline{r} = 36$, $\underline{m} = 72$, $\underline{\beta} = 72$, $\underline{v} = 0$ on tire, au moyen des formules données au § 33, $\underline{\alpha} = 144$, $\underline{x} + \underline{\omega} = 540$, $\underline{y} + \underline{\omega} = 504$, $\underline{h} + \underline{H} = 504$, $\underline{g} + \underline{G} = 2322$, $\underline{p} = 19$.

§ 53. La projection f' de la focale sur le plan W , le point Z étant le centre de projection, est une courbe dont le degré est la moitié de celui de la focale (§ 8); donc: $\underline{\mu}' = 18$.

Par le point Z il passe seize droites k , tangentes à la focale en les seize points de rencontre des huit droites l_w (§ 9); donc, la classe de la courbe f' est:

$$\underline{\nu}' = \frac{1}{2}(36 - 16) = 10.$$

$$\underline{\beta} = 72; \text{ donc } \underline{\kappa}' = 36.$$

$\underline{m} = 72$; donc, il passe par le point Z soixante-douze plans o . Parmi ces plans se trouvent les seize plans stationnaires \underline{a} , qui passent par les seize droites k , lesquelles se rencontrent au point Z ; donc il passe encore par le point Z vingt-quatre plans o , qui coïncident deux à deux; donc: $\underline{\iota}' = 12$.

De ces valeurs $\underline{\mu}' = 18$, $\underline{\nu}' = 10$, $\underline{\kappa}' = 36$, $\underline{\iota}' = 12$ on déduit: $\underline{\tau}' = 18$, $\underline{\mathcal{J}}' = 94$, $\underline{\rho}' = 6$.

* Si l'on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini, la projection f' devient la projection orthogonale de la focale sur le plan de la cubique d_3 .

Section II.

FOCALE DE LA CUBIQUE DE LA TROISIÈME CLASSE.

§ 54. *Des points stationnaires de la courbe donnée et des génératrices stationnaires.* Une cubique de la troisième classe possède un point stationnaire. Nous avons vu au § 16, que si la courbe d présente la singularité d'un point stationnaire, il se pourrait que la surface O possède une génératrice stationnaire v . Soit κ le point stationnaire, soit t la tangente à la courbe d en le point κ , soit R le point, où cette droite t rencontre la droite z et soient P_1 et P_2 les deux points, où la polaire du point R , par rapport à la conique c_2 rencontre cette conique c_2 . Les droites κP_1 et $P_2 \kappa$ seront les deux droites l , qui passent par le point κ . Par le point κ il passe trois tangentes consécutives à la courbe d , par conséquent, il passe par ce point κ deux triades de plans o consécutifs. Donc, ou le point κ est deux fois un point de l'arête de rebroussement, ou par chacun des deux droites l , il passe une triade de plans o .

Si par la droite $P_1 \kappa$, il passe trois plans o consécutifs cette droite est une génératrice stationnaire v . Alors chaque plan, et par conséquent le plan V aussi, rencontre cette droite $P_1 \kappa$ dans un point, qui est un point stationnaire de l'intersection de ce plan avec la surface O . Cette section consiste en la conique c_2 et en

quelques droites, dont, en général, aucune ne passe par le point P_1 , donc, la droite $P_1 z$ n'est pas une génératrice stationnaire v et le point z doit être le point, où la génératrice ordinaire $z P_1$ touche l'arête de rebroussement a .

De même, la droite $P_2 z$ est tangente à l'arête de rebroussement a en le point z et, par conséquent, le point z est un noeud H de la courbe a .

Ce raisonnement tombe en défaut si le plan V passe par la droite $P_1 z$, puisque chaque plan, passant par une génératrice stationnaire v , coupe la développable O suivant une courbe avec laquelle la droite v a un contact de l'ordre trois et que l'intersection ne présente plus de point stationnaire sur la droite v (*Cremona-Curtze*, *Oberflächen* p. 83).

Donc, si le point stationnaire z est situé sur la droite z il est possible que, par ce point, il passe deux génératrices stationnaires v . Nous verrons dans un chapitre suivant, que la courbe d ayant cette position particulière, la surface O possède en effet deux droites v .

Sur la développable O , le point z , de la courbe d , est un point quadruple parce que ce point z est un noeud H de la courbe a . Par ce point il passe six branches de courbes doubles, dont deux sont les deux branches de l'arête de rebroussement a et deux autres les deux branches de la courbe d . Par le point z , il passe encore deux branches de la courbe nodale, qui doivent appartenir à la focale. Comme les plans tangents aux quatre nappes de la surface coïncident deux à deux les quatre branches nodales seront toutes tangentes à la droite d'intersection des deux plans tangents, savoir, la tangente à la courbe d en le point z . Par conséquent, le point k est un point stationnaire de la focale, et la tangente à la focale en ce point, coïncide avec la tangente t à la courbe d en le point z .

§ 55. *Détermination des singularités de la surface O .* La section de la surface O par le plan W consiste en la cubique d_3 , qui est une courbe nodale et en les deux fois trois droites l_w tangentes à la cubique d_3 , qu'on peut mener par les points I et J ; donc: $r = 2 \times 3 + 2 \times 3 = 12$.

La section par le plan V consiste en la conique c_2 , qui est une courbe triple et en les trois fois deux droites l_v , tangentes à la conique c_2 qu'on peut mener par les points A_1 , A_2 et A_3 . On trouve facilement: $m = 6$, $\alpha = 2$, $\omega = 0$, $v = 0$, $G = 0$, $H = 1$ (§§ 31, 32, 54).

Au moyen des formules de *Cayley-Plücker* on trouve alors : $n = 20$, $x = 33$, $y = 47$, $\beta = 30$, $h = 138$, $g = 6$, $p = 2$.

Les vingt points d'intersections de l'arête de rebroussement a avec le plan W sont 1° les points de contact des six droites l_w avec la cubique d_3 ; ce sont des points β et ils comptent pour trois intersections chacun (§ 21), 2° le point z qui est un noeud H de la courbe a .

Les points d'intersections avec le plan V sont :

1° les deux points z ;

2° les six points de contact S des droites l_v avec la conique c_2 .

On trouve facilement $y_1 = 6$, $y_2 = 14$; donc, il reste $y_3 = 27$. (§ 43).

Le plan W étant un plan y_3 pour chacun des neuf points de la focale où se rencontrent deux droites l_w , il passe en outre par un point quelconque du plan W dix-huit plans y_3 . Donc les cordes de contact (directrices) enveloppent une courbe de la neuvième classe.

Le plan V compte pour douze plans y_3 , pour les douze couples de droites l_v qui se rencontrent dans des points de la focale; donc, les intersections des plans y_3 avec le plan V enveloppent une courbe de la quinzième classe. Le lieu des pôles de ces intersections (par rapport à la conique c_2), ou bien le lieu des intersections des tangentes k à la focale avec le plan V , ou bien encore la courbe b , est de l'ordre quinze.

Les points de contact des six droites l_w avec la cubique d_3 et les six points de contact S des droites l_v avec la conique c_2 sont des points stationnaires β ; donc, des trente points stationnaires β il y en a dix-huit, qui sont situés sur la focale; ou bien $\beta_1 = 18$.

Chaque droite l rencontre $r - 4 = 12 - 4 = 8$ autres droites l non consécutives, dont une sur la cubique d_3 et deux sur la conique c_2 , donc chaque droite l rencontre la focale cinq fois; $l = 5$.

§ 56. *Détermination des singularités de la focale.* La cubique d_3 est du degré trois, la conique c_2 étant une courbe triple est de l'ordre six; donc, il reste pour le degré de la focale: $n = 33 - 3 - 6 = 24$.

Les vingt-quatre points d'intersection de la focale avec le plan W sont: 1° les neuf points, où les trois droites l_w , passant par le point I , rencontrent les trois droites l_w , qui passent par le point J ; 2° les six points D où ces tangentes l_w rencontrent encore la cubique d_3 ; ces points sont des noeuds de la focale, donc ils comptent double; 3° le point z , qui est un point stationnaire β , dont

la tangente se trouve dans le plan W ; donc, ce point compte pour trois intersections.

Les intersections de la focale avec le plan V sont: 1° les douze points outre les points A , où se rencontrent les droites l_v ; 2° les six points S par chacun desquels il passe une branche de la focale laquelle y touche une droite l_v (§ 36).

Détermination de \underline{r}

$$\begin{aligned} R &= r(m + 6) - 3n - 9m - 3v - 2G, \\ R &= 12(6 + 6) - 3 \times 20 - 9 \times 6 - 3 \times 0 - 2 \times 0, \\ R &= 144 - 60 - 54 = 30; (E. Pascal II p. 322). \end{aligned}$$

Le rang de la courbe nodale d_3 étant trois et celui de la courbe triple c_2 étant six, il reste pour le rang de la focale $30 - 3 - 6 = 21$; donc: $\underline{r} = 21$.

Autrement: considérons la développable K dont les génératrices k sont tangentes à la focale. La section de cette surface K par le plan V , consiste en les six droites l_v et en une courbe restante b . Cette courbe b est, comme on l'a vu au § précédent du degré quinze. On peut s'en assurer encore en déterminant le nombre des points de la courbe b sur une tangente quelconque de la conique c_2 . Cette tangente rencontre la courbe b quinze fois, puisque, par son point de contact avec la conique c_2 , il passe trois droites l sur chacune desquelles se trouvent cinq points de la focale, l étant cinq. (§§ 44, 55).

Les trente points de rencontre des courbes b et c_2 sont: 1° les six points S , où la courbe b touche la courbe c_2 ; 2° les dix-huit points, où les tangentes à la focale en les points β_1 rencontrent la conique c_2 .

La section de la surface K , par le plan V , étant composée de la courbe b du degré quinze et des six droites l_v , qui sont des génératrices k simples, cette section est du degré vingt-et-un; donc $\underline{r} = 21$.

Détermination de $\underline{\beta}$.

$$\begin{aligned} \lambda &= n(r + 4) - 6(r + \beta) - 4(\omega + H) - 2v. \\ \lambda &= 20(12 + 4) - 6(12 + 30) - 4(0 + 1) - 2 \times 0. \\ \lambda &= 20.16 - 6.42 - 4 = 4(80 - 63 - 1) = 64. \end{aligned}$$

Les points α et S comptent pour $2 \times 1 + 6 \times 3 = 20$ intersections de la courbe α avec une nappe de la surface O ; donc, il

reste encore $64 - 20 = 44$ points λ , donnant des points stationnaires $\underline{\beta}$ sur la focale. Le point α de la conique d_3 étant aussi un point $\underline{\beta}$ (§ 54) le nombre total des points stationnaires $\underline{\beta} = 44 + 1 = 45$.

Détermination de \underline{m} et de $\underline{\beta}$. La classe \underline{m} de la développable K sera la moitié du nombre de ses plans tangents \underline{o} , qui sont à la fois tangents à la conique c_2

Ces plans tangents communs sont:

1° les deux plans α qui comptent chacun pour cinq plans \underline{o} l étant cinq;

2° les six plans o passant par les droites l_v ; ces plans sont aussi des plans \underline{o} (§ 36) et comptent chacun pour trois plans tangents communs (§ 45);

3° les plans o , qui sont osculateurs à la focale en les points stationnaires provenant de la singularité λ (§ 45). Le nombre de ces points stationnaires de la focale est moindre d'un que le nombre total $\underline{\beta}$ à cause du point α de la conique d_3 , ce point étant un point $\underline{\beta}$ (§ 54). Le plan osculateur \underline{o} de ce point $\underline{\beta}$ n'est pas tangent à la conique c_2 .

Ce qui donne la relation:

$$\underline{m} = 1/2 \{ 2 \times 5 + 6 \times 3 + \underline{\beta} - 1 \} \quad (\text{A}).$$

Des formules de *Cayley-Plücker* on tire la relation:

$$\underline{\beta} = 3 (\underline{n} - \underline{r}) + \underline{m} + \underline{v}. \quad (\text{B}).$$

On a vu que $\underline{n} = 24$ (§ 55), $\underline{r} = 21$ (§ 56) $\underline{v} = 0$ (§ 54). Si l'on substitue ces valeurs, la relation B devient:

$$\underline{\beta} = 3 (24 - 21) + \underline{m} + 0 = 9 + \underline{m} \quad (\text{C}).$$

Des relations A et C on déduit $\underline{m} = 36$, $\underline{\beta} = 45$.

Une fois connues les singularités $\underline{n} = 24$, $\underline{r} = 21$, $\underline{m} = 36$, $\underline{\beta} = 45$, $\underline{v} = 0$, on en déduit au moyen des formules de *Cayley-Plücker* les autres singularités: $\underline{\alpha} = 69$, $\underline{x} + \underline{\omega} = 156$, $\underline{y} + \underline{\omega} = 144$, $\underline{h} + \underline{H} = 198$, $\underline{g} + \underline{G} = 516$, $\underline{p} = 10$.

§ 57. *De la projection f' de la focale sur le plan W .* La projection f' de la focale sur le plan W , le point Z étant le centre de projection, est une courbe dont le degré est la moitié de celui de la focale (§ 8); donc $\underline{\mu}' = 12$.

Par le point Z il passe neuf droites k tangentes à la focale en

les neuf points de rencontre des six droites l_w (§ 9); donc, la classe de la courbe f' est:

$$\underline{\nu}' = \frac{1}{2} (21 - 9) = 6.$$

$\underline{\beta} = 45$; un de ces 45 points $\underline{\beta}$ est dans le plan W . Ce point stationnaire se projette comme point ordinaire de la courbe f' ; donc, $\underline{\kappa}' = 22$.

\underline{m} étant 36, il passe par le point Z trente-six plans o . Parmi ces \underline{m} plans se trouvent les neuf plans stationnaires \underline{a} , qui passent par les neuf droites k , lesquelles se rencontrent au point Z , et le plan o qui appartient au point $\underline{\beta}$, coïncidant avec le point z ; donc, il passe en outre huit plans o par le point Z ; ces plans coïncident deux à deux et donnent: $\underline{i}' = 4$.

De ces valeurs $\underline{\mu}' = 12$, $\underline{\nu}' = 6$, $\underline{\kappa}' = 22$, $\underline{i}' = 4$ on tire $\underline{\tau}' = 3$, $\underline{\delta}' = 30$, $\underline{p}' = 3$.

$\underline{\tau}'$ étant trois, la courbe f' ne peut se décomposer qu'en des droites et en une seule courbe restante. Cette courbe restante aurait les singularités $\underline{\tau}' = 3$, $\underline{\kappa}' = 22$, $\underline{i}' = 4$ et $\underline{\nu}' = 6$; donc, elle ne peut être une courbe autre que la courbe \bar{f}' , ou bien la courbe f' ne se décompose pas.

Si la focale se décompose, elle devrait se décomposer en deux parties, la projection de chaque partie étant la courbe f' . Les deux branches de la focale, qui passent par le point z , devraient alors appartenir à deux courbes différentes, ce qui est impossible; donc, la focale f ne se décompose pas.

§ 58. *De la section de la surface K par le plan W .* Nous avons vu au § 8 que la section de la surface K par le plan W est une courbe nodale de la surface K , et on serait tenté de croire que, par conséquent, l'ordre \underline{r} de cette surface K devrait toujours être un nombre pair. Nous avons vu au § 56 que $\underline{r} = 21$, donc, en le cas dont s'agit, la section ne peut évidemment pas être formée par une courbe nodale seule. Remarquons que la droite t tangente à la courbe d_3 en le point stationnaire z est une droite k simple tangente à la focale en un point stationnaire $\underline{\beta}$. Donc, en ce cas, la section de la surface K par le plan W consiste en la droite t et en une courbe s du degré dix, laquelle est une courbe nodale de la surface K ; donc: $\underline{\mu}'' = 10$.

Les trente points, où la courbe s rencontre la cubique d_3 sont: 1° le point z , où une branche de la courbe s touche la droite t , tangente à la cubique d_3 en le point z ; ce point compte, par conséquent, pour trois intersections; 2° les trois points A_1 , A_2 et A_3 en

chacun desquels la courbe \underline{s} touche la cubique d_3 (§ 48); 3° les six points D , qui sont des noeuds de la focale et des points stationnaires de la section \underline{s} ; la tangente à la courbe \underline{s} ne coïncidant pas avec la tangente à la cubique d_3 , chacun de ces points compte pour deux intersections; 4° les neuf points par chacun desquels il passe deux droites k , tangentes à la focale en des points stationnaires β_1 de la courbe a .

Le plan \mathcal{W} n'est pas un plan \underline{o} et par chaque tangente à la courbe \underline{s} , il passe deux plans \underline{o} ; donc, $\underline{\nu}'' = \underline{m} : 2 = 18$.

Des vingt-quatre points où la focale rencontre le plan \mathcal{W} (§ 55) il n'y a que les six points D , qui donnent des points stationnaires sur la section \underline{s} (§ 48); donc, $\underline{\kappa}'' = 6$.

Les neuf plans $\underline{\alpha}$, qui sont osculateurs en les points d'intersection de deux droites l_w ne coupent pas le plan \mathcal{W} suivant des tangentes d'inflexion de la section \underline{s} .

Par chaque tangente d'inflexion de la section \underline{s} il passe deux plans stationnaires $\underline{\alpha}$; donc, $\underline{\iota}'' = \frac{1}{2}(\underline{\alpha} - 9) = \frac{1}{2}(69 - 9) = 30$.

La courbe nodale de la surface K est du degré cent cinquante-six, cette courbe se décompose en la courbe \underline{s} et en une courbe restante du degré 146. Cette courbe rencontre le plan \mathcal{W} ; 1° trois fois dans chaque point D ; 2° deux fois dans chacun des huit points, où la tangente t rencontre en plus la section \underline{s} ; 3° une fois dans chacun des points, où un des quatre plans doubles \underline{G} passant par le point Z , touche la section \underline{s} . Le nombre de fois que la courbe rencontre la section \underline{s} en des noeuds de cette section est donc: $146 - 6 \times 3 - 8 \times 2 - 4 = 108$. Par chaque noeud de la section \underline{s} , il passe quatre branches de la courbe, donc le nombre de noeuds est vingt-sept; $\underline{\delta}'' = 27$. Ces valeurs $\underline{\mu}'' = 10$, $\underline{\nu}'' = 18$, $\underline{\kappa}'' = 8$, $\underline{\iota}'' = 30$, $\underline{\delta}'' = 27$ satisfont aux relations de Plücker; on en déduit: $\underline{\tau}'' = 103$, $\underline{p}'' = 3$.

Section III.

FOCALE D'UNE COURBE DU DEGRÉ QUATRE ET DE LA CLASSE TROIS.

§ 59. *Des tangentes doubles de la courbe donnée d .* Nous avons vu au § 15 que la développable O pourrait posséder un plan double G si la courbe d possède une bitangente τ .

Soit R le point, où cette bitangente τ rencontre la droite z , soient P_1 et P_2 les deux points, où la polaire du point R , par rapport à la conique c_2 , rencontre cette conique c_2 , et soient Q_1 et Q_2 les deux points, où la droite τ est tangente à la courbe d . Les droites $P_1 Q_1$ et $P_1 Q_2$ sont deux des droites l , qui passent

par le point P_1 . Le plan $(P_1 \tau)$ est le plan o , tangent à la développable O le long de la droite $P_1 Q_1$ aussi bien que le long de la droite $P_1 Q_2$. Donc, ce plan $(P_1 \tau)$ est un plan G ; il en est de même pour le plan $(P_2 \tau)$; par conséquent, par une droite bitangente à la courbe d , il passe deux plans G .

Les deux nappes de la surface O , qui passent par les droites $P_1 Q_1$ et $P_1 Q_2$, ont en le point commun P_1 , le même plan tangent, savoir: le plan $(P_1 \tau)$. Ces deux nappes se coupent suivant deux branches de la courbe nodale, une branche est la conique c_2 , l'autre branche appartient à la focale.

Il en est de même pour le point P_2 et, en général, nous aurons: par chaque point, où un plan G est tangent à la conique c_2 il passe une branche de la focale.

§ 60. *Détermination des singularités de la surface O .* Déterminons, comme exemple, la focale d'une courbe d_4 du degré quatre et de la classe trois.

Les singularités de cette courbe d_4 sont:

$\mu = 4$, $\nu = 3$, $\delta = 0$, $\varkappa = 3$, $\iota = 0$, $\tau = 1$, $p = 0$, d'où on déduit: $G = 2\tau = 2$, $m = 2\nu = 6$, $\alpha = 2\iota = 0$ (§ 31), $v = 0$, $H = 3$ (§§ 32, 54), $\omega = 0$ (§§ 32, 50).

La section de la surface O par le plan W , consiste en la courbe d_4 , qui est une courbe nodale et en les deux fois trois droites l_w tangentes à la courbe d_4 , qu'on peut mener par les points I et J ; donc $r = 2 \times 4 + 2 \times 3 = 14$.

La section de la surface O par le plan V consiste en la conique c_2 , qui est une courbe triple, ν étant trois, et en les quatre fois deux droites l_v , tangentes à la conique c_2 , qu'on peut mener par les quatre points A , où la courbe d_4 rencontre la droite z ; donc: $r = 3 \times 2 + 4 \times 2 = 14$.

Des singularités déterminées, on tire, au moyen des formules données au § 33, $n = 24$, $x = 52$, $\beta = 36$, $y = 70$.

Les vingt-quatre points d'intersection de l'arête de rebroussement a avec le plan W sont: 1° les six points, où les droites l_w touchent la courbe d_4 ; ces points sont des points stationnaires β et comptent pour trois intersections chacun (§ 21); 2° les trois points stationnaires \varkappa de la courbe d_4 ; ces points sont des noeuds H de la courbe a (§ 54).

Les vingt-quatre points d'intersection de l'arête de rebroussement a avec le plan V sont les huit points S , où les droites l_v touchent la conique c_2 , ces points étant des points β , ils comptent pour trois intersections chacun.

Les points de contact S des huit droites l_v et les six points de contact des droites l_w avec la courbe d_4 , sont des points β ; donc des trente-six points stationnaires β , il y en a vingt-deux, qui sont situés sur la focale, ou bien: $\beta_1 = 22$.

On trouve facilement $y_1 = 7$, $y_2 = 18$, donc il reste $y_3 = 45$ (§ 43). Le plan W étant un plan y_3 pour chacun des neuf points C , où se rencontrent deux droites l_w , il passe, en outre, par chaque point du plan W , trente-six plans y_3 ; donc, les cordes de contact (directrices) enveloppent une courbe de la classe dix-huit.

Le plan V étant un plan y_3 , pour chacun des vingt-quatre points B , où se rencontrent deux droites l_v , il passe, en outre, par chaque point du plan V vingt-et-un plans y_3 ; donc la courbe b est du degré vingt-et-un (§ 43).

Chaque droite l rencontre $r - 4 = 10$ autres droites l non consécutives, dont une sur la courbe d_4 et deux sur la conique c_2 ; donc, chaque génératrice rencontre la focale sept fois ou $l = 7$.

§ 61. *Détermination des singularités de la focale. Détermination de n .* La courbe d_4 est du degré quatre, la conique c_2 , étant une courbe triple, est de l'ordre six; donc, il reste pour le degré de la focale: $x - 4 - 6$, ou $n = 42$.

Les quarante-deux points d'intersection de la focale avec le plan W sont: 1° les neuf points C , où se rencontrent deux droites l_w ; 2° les douze points D où les tangentes l_w coupent la courbe d_4 ; ces points sont des noeuds II de la focale; 3° les trois points α de la courbe d_4 ; ces points sont des points stationnaires β de la focale et comptent pour trois intersections chacun (§ 54).

Les points d'intersection de la focale avec le plan W sont: 1° les vingt-quatre points B , où se rencontrent deux droites l_v ; 2° les huit points S , où la focale est tangente au plan V (§ 36); 3° les deux points P_1 et P_2 (§ 59).

Détermination de r . La section de la surface K par le plan V consiste en les huit droites l_v et en la courbe b .

La courbe b rencontre chaque tangente à la conique c_2 , vingt-et-une fois, puisque par son point de contact, avec la conique c_2 , il passe trois droites l , sur chacune desquelles se trouvent sept points de la focale, l étant sept (§§ 44, 60). La section de la surface K par le plan V , étant composée des huit droites l_v , qui sont des génératrices k simples et de la courbe b , qui est du degré vingt-et-un, cette section est du degré vingt-neuf; ou $r = 29$.

Autrement. La section de la surface K par le plan W consiste en les trois tangentes à la courbe d_4 en les points stationnaires α et en une courbe double s (§ 58). Cette courbe double s rencontre la courbe d_4 cinquante-deux fois, savoir: 1° trois fois dans chacun des trois points α ; 2° deux fois dans chacun des douze points D , lesquels sont des points stationnaires de la courbe s ; 3° deux fois dans chacun des quatre points A , la courbe s étant tangente à la courbe d_4 en chacun de ces points. La section est donc composée de trois droites, génératrices simples, et d'une courbe double du degré treize; donc, $\underline{r} = 3 + 2 \times 13 = 29$.

Détermination de \underline{m} et de $\underline{\beta}$. La classe \underline{m} de la développable K est la moitié du nombre de ses plans tangents \underline{o} , qui sont à la fois tangents à la conique c_2 .

Ces plans tangents communs sont: 1° les huit plans \underline{o} , passant par les droites l_v ; ces plans sont des plans \underline{o} (§ 36) et comptent pour trois plans tangents communs chacun (§ 45), 2° les plans \underline{o} qui sont osculateurs à la focale en les points stationnaires $\underline{\beta}$, provenant de la singularité λ . Soit $\underline{\beta}$ le nombre total de points stationnaires $\underline{\beta}$ de la focale, parmi ce nombre $\underline{\beta}$ de points, se trouvent les trois points α de la courbe d_4 (§ 54). Les plans osculateurs de ces trois points ne sont pas tangents à la conique c_2 ; donc,

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \{ 8 \times 3 + \underline{\beta} - 3 \} \quad (\text{A}).$$

Des formules de *Cayley-Plücker*, on tire la relation:

$$\underline{\beta} = 3 (\underline{n} - \underline{r}) + \underline{m} + \underline{v} \quad (\text{B}).$$

On a vu que $\underline{n} = 42$, $\underline{r} = 29$ et $\underline{v} = 0$ (§ 46); si l'on substitue ces valeurs, la relation B devient:

$$\underline{\beta} = 39 + \underline{m} \quad (\text{C}).$$

Des relations A et C on déduit: $\underline{m} = 60$, $\underline{\beta} = 99$.

Une fois les singularités \underline{n} , \underline{r} , \underline{m} , \underline{v} et $\underline{\beta}$ connues on trouve facilement les autres.

CHAPITRE VI.

FOCALE DE LA COURBE PLANE D'ORDRE μ ET DE POSITION GÉNÉRALE.

§ 62. *Détermination des singularités ordinaires de la développable* O . Soit la courbe d une courbe plane possédant les singularités

δ , κ , τ et ι et n'occupant pas une position particulière, par rapport au plan V ou par rapport aux points I et J .

La section de la surface O par le plan W consiste en la courbe d du degré μ , laquelle est une courbe nodale, puisque chaque tangente à la courbe d rencontre deux tangentes à la conique c_2 et en les deux fois ν droites l_v , tangentes à la courbe d , qu'on peut mener par les points I et J (§ 11); donc $r = 2\mu + 2\nu$.

La section de la surface O par le plan V consiste en la conique c_2 , qui est une courbe multiple d'ordre ν , puisque chaque tangente à la conique c_2 rencontre ν tangentes à la courbe d , et en μ fois deux droites l_v , tangentes à la conique c_2 en les points S , qu'on peut mener par les μ points A , où la courbe d rencontre le plan V ; donc, $r = 2\nu + 2\mu$.

La classe m de la surface O sera le nombre des tangentes communes à la conique c_2 et à la projection d' de la courbe d sur le plan V , un point quelconque de l'espace étant le centre de projection (§ 12). La projection d' étant, comme la courbe d , de la classe ν , le nombre de ces tangentes communes est 2ν ; donc $m = 2\nu$.

De cette valeur $m = 2\nu$ il s'ensuit que, si la courbe d possède une focale plane, cette focale sera de la même classe ν que la courbe d .

Nous avons vu au § 13 qu'un plan σ peut devenir un plan stationnaire α : 1° s'il coïncide avec un des plans V et W , 2° s'il passe par une tangente d'inflexion ι de la courbe d . Le plan V n'étant pas tangent à la courbe d , n'est pas un plan σ ; de même, le plan W n'étant pas tangent à la conique c_2 , ce plan n'est pas un plan σ non plus. Nous avons vu au § 31, que par une tangente d'inflexion il passe deux plans α ; donc $\alpha = 2\iota$.

Nous avons vu aux §§ 16 en 17 que la surface O pourrait présenter une génératrice stationnaire v ou une génératrice double ω , si une des droites l_v ou l_{ω} était une droite double, ou si la courbe d présentait un point double (rebroussement ou noeud).

Les points A étant des points ordinaires de la courbe d , les droites l_v ne sont pas des droites doubles; les droites l_{ω} sont également des génératrices ordinaires, puisque les points I et J n'occupent pas une position particulière, par rapport à la courbe d (par exemple, ces points ne sont pas situés sur une tangente d'inflexion ou sur une tangente double de la courbe d).

La courbe d présente des points doubles, mais nous avons vu

aux §§ 50 et 54 que ces points doubles ne donnent pas des droites v et ω , à moins que ces points doubles ne soient pas situés sur la droite z ou que ces points ne soient pas des points consécutifs de la courbe d . La courbe d n'occupe pas une position particulière, donc :

$$v = 0, \quad \omega = 0.$$

Nous avons vu au § 15, que pour que la surface O puisse posséder un plan bitangent G , il faut satisfaire à une des conditions suivantes, nécessaires mais peut-être pas suffisantes; 1° que les plans V et W soient des plans o , 2° que la courbe d possède une bitangente τ , 3° que les deux courbes d et c_2 se rencontrent.

La courbe d satisfait à la deuxième condition et nous avons vu au § 59, que chaque bitangente τ donne deux plans G ; donc :

$$G = 2 \tau = \mu^2 - \mu - \nu - 3 \iota.$$

Nous avons vu au § 32 qu'il n'existe pas un noeud H de la courbe a , situé en dehors des plans V et W , à moins que la courbe d n'occupe pas de position particulière par rapport aux points I et J . Nous avons vu au § 54 que chaque point z de la courbe d est un noeud H de la courbe a ; donc,

$$H = z = 3 (\mu - \nu) + \iota.$$

Des singularités déterminées,

$$r = 2 (\mu + \nu),$$

$$m = 2 \nu,$$

$$\alpha = 2 \iota,$$

$$v = 0,$$

$$\omega = 0,$$

$$G = \mu^2 - \mu - \nu - 3 \iota,$$

$$H = 3 (\mu - \nu) + \iota,$$

on déduit, au moyen des formules données au § 33,

$$n = 2 (3 \mu + \iota),$$

$$x = 2 (\mu + \nu)^2 - 10 \mu - 2 \nu - 3 \iota,$$

$$y = 2 (\mu + \nu)^2 - 4 \mu - 4 \nu - \iota,$$

$$\beta = 12 \mu - 4 \nu + 6 \iota.$$

Chaque droite l rencontre $r - 4 = 2 \mu + 2 \nu - 4$ autres droites l non consécutives, dont une sur la courbe d et $\nu - 1$ sur la conique c_2 ; donc chaque droite l rencontre la focale $2 \mu + \nu - 4$ fois, ou bien: $l = 2 \mu + \nu - 4$.

§ 63. *Discussion de n , de y , de β et de λ .* Les $2(3\mu + \iota)$ points d'intersection de l'arête de rebroussement a avec le plan W sont: 1° les 2ν points de contact des tangentes l_w ; ces points sont des points stationnaires β et comptent pour trois intersections chacun (§ 21); 2° les κ points stationnaires de la courbe d ; ces points sont des noeuds H de la courbe a et comptent, par conséquent, pour deux intersections chacun (§ 54). Le nombre total des intersections est donc

$$2\nu \times 3 + \kappa \times 2 = 6\nu + 6(\mu - \nu) + 2\iota = 2(3\mu + \iota).$$

Les points d'intersection de la courbe a avec le plan V sont: 1° les 2μ points S , qui comptent pour trois intersections chacun (§ 21); 2° les points α , qui sont au nombre de 2ι .

Des points stationnaires β de la courbe a , 2ν sont situés sur la courbe d , savoir les points de contact de cette courbe avec les droites l_w , et 2μ de ces points sont situés sur la conique c_2 , savoir les points S ; donc le nombre β_1 des points stationnaires de la courbe a , situés sur la focale est: $\beta - 2\mu - 2\nu$ donc;

$$\beta_1 = 10\mu - 6\nu + 6\iota.$$

Déterminons le nombre des plans y_1 , qui sont les plans y pour lesquels les deux droites l situées dans un tel plan se rencontrent dans un point de la courbe d . Soit B un point quelconque du plan V , par ce point B il passe d'abord le plan V , qui compte pour μ plans y_1 , parce que dans le plan V se trouvent μ couples de droites l , qui se rencontrent dans les points A de la courbe d . Les points Q de la courbe d , dont le plan y_1 passe par le point B , doivent être tel, que la polaire par rapport à la conique c_2 du point R , où la tangente à la courbe d en le point Q rencontre la droite z , passe par le point B . Cette polaire passe toujours par le point Z , donc le point R doit être le pôle de la droite BZ , par rapport à la conique c_2 . A un point R il correspond ν points Q , donc il passe en plus par le point B ν plans y_1 , d'où.

$$y_1 = \mu + \nu \quad (\S 43).$$

On peut déterminer le nombre des plans y_2 , passant par un point quelconque, lesquels sont les plans y , pour lesquels les deux droites l qui sont situées dans un tel plan, se rencontrent dans un point de la conique c_2 , en prenant pour le point quelconque un point B quelconque situé dans le plan W . Les ν droites l_w , qui passent par le point I donnent $\frac{1}{2}(\nu^2 - \nu)$ couples de droites l , qui

se rencontrent sur la conique c_2 ; il en est de même pour le point J , donc le plan W compte pour $\nu^2 - \nu$ plans y_2 .

Nous avons vu au § 43 qu'on obtient deux plans y_2 pour chaque point R de la droite z , lequel satisfait à la condition, que le point B se trouve sur une droite, qui joint deux des ν points de contact des tangentes à la courbe d , qu'on peut mener par le point R . Le nombre de ces points est $\mu\nu - \frac{1}{2}(3\nu + \kappa)$, (J. C. KLUYVER Nieuw Archief v. W. deel XVII). De ce qui précède il ressort que:

$$y_2 = \nu^2 - \nu + 2 \left\{ \mu\nu - \frac{1}{2}(3\nu + \kappa) \right\} = \nu^2 + 2\mu\nu - \nu - 3\mu - \iota.$$

Le nombre de plans y_3 , passant par un point quelconque de l'espace, lesquels sont des plans y pour lesquels les deux droites l , situées dans un tel plan, se rencontrent dans un point de la focale est donc: $y - y_1 - y_2$ d'où $y_3 = 2\mu^2 + 2\mu\nu + \nu^2 - 2\mu - 4\nu$.

Le plan V compte pour $\frac{2\mu(2\mu-2)}{2}$ plans y_3 , à cause des $\frac{2\mu(2\mu-2)}{2}$

couples de droites l_v , qui se rencontrent dans des points de la focale; donc, les intersections des plans y_3 avec le plan V , enveloppent une courbe de la classe $y_3 - \mu(2\mu - 2)$, ou bien de la classe $\nu(2\mu + \nu - 4)$.

Le lieu des pôles de ces intersections, par rapport à la conique c_2 , ou bien le lieu des intersections des tangentes k à la focale, avec le plan V , ou bien encore la courbe b est du degré $\nu(2\mu + \nu - 4)$.

Dans le plan W sont situées 2ν droites l_w , qui se rencontrent dans les ν^2 points C de la focale, donc, le plan W doit compter pour ν^2 plans y_3 . Par un point quelconque du plan W il passe, par conséquent, $2\mu^2 + 2\mu\nu - 2\mu - 4\nu$ autres plans y_3 . Nous avons vu au § 43 que deux plans y_3 , appartenant à deux foyers conjugués, passent par une même droite du plan W ; cette droite est la corde de contact des deux foyers conjugués avec la courbe d .

Par conséquent, ces cordes de contact (directrices) enveloppent une courbe de la classe $\mu^2 + \mu\nu - \mu - 2\nu$.

$\lambda' = m(r + 4) - 6(r + \alpha) - 4(\omega + G) - 2\nu$, (E. Pascal II Geometria. p. 322); si l'on substitue dans cette formule les valeurs des singularités trouvées au § 62 on trouve:

$$\lambda' = 4\mu(\nu - 2).$$

On obtient un plan λ' toute fois que la courbe α et une nappe de la surface O ont une tangente commune. Chaque droite l_v touche en un point S à la courbe α et à $\nu - 2$ nappes de la surface O ;

donc, une droite l_v compte pour $2(v - 2)$ tangentes communes. Par les 2μ droites l_v , il passe, par conséquent, $4\mu(v - 2)$ plans λ' ; donc, en dehors du plan V , il n'existe plus de point λ' , où une droite l touche une nappe de la surface O . Il en résulte que la focale ne possède pas des plans $\underline{\alpha}$, provenant de la singularité λ' .

§ 64. *Détermination de \underline{n} et de ι .* Le degré de la courbe d étant μ et celui de la conique c_2 , qui doit compter pour $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ coniques doubles, étant $\nu(\nu - 1)$, le degré de la focale est:

$$x = \mu + \nu(\nu - 1); \text{ donc,} \\ \underline{n} = 2\mu^2 + 4\mu\nu + \nu^2 - 11\mu - \nu - 3\iota.$$

Les intersections de la focale avec le plan W sont:

1° les ν^2 points C , où les droites l_w , qui passent par le point I rencontrent les droites l_w , qui passent par le point J ;

2° les κ points stationnaires de la courbe d ; ces points sont des points stationnaires β de la focale; la tangente à la focale en un de ces points coïncide avec la tangente à la courbe d , donc, un tel point compte pour trois intersections (§ 54);

3° les δ noeuds de la courbe d ; ces points sont des points quadruples de la focale (§ 51);

4° les $2\nu(\mu - 2)$ points D , où les 2ν tangentes l_w coupent la courbe d ; chacun de ces points compte pour deux intersections, parce que ce sont des noeuds de la focale (§ 35).

Les points de la focale situés dans le plan W sont donc au nombre de $\nu^2 + 3\kappa + 4\delta + 2\nu(\mu - 2) \times 2$.

Si l'on remplace dans cette expression les singularités δ et κ par leurs valeurs en fonction des singularités μ , ν et ι , l'expression devient $2\mu^2 + 4\mu\nu + \nu^2 - 11\mu - \nu - 3\iota$, ce qui est bien la valeur trouvée pour \underline{n} .

Les intersections de la focale avec le plan V sont:

1° les $\frac{2\mu(2\mu - 2)}{2}$ points B où se rencontrent deux droites l_v

2° les 2μ points S ; par chacun de ces points S , il passe $\nu - 2$ branches de la focale, qui y sont tangentes au plan V ;

3° les 2τ points G où un plan G touche la conique c_2 (§ 59).

Le nombre des points de la focale situés dans le plan V est donc:

$$\mu(2\mu - 2) + 2\mu(\nu - 2) \times 2 + 2\tau = \\ 2\mu^2 + 4\mu\nu + \nu^2 - 11\mu - \nu - 3\iota.$$

Détermination de r . $R = r m + 6 r - 3 n - 9 m - 3 v - 2 G$ (E. Pascal II Geometria. p. 322), si l'on substitue dans cette formule pour r , m , n , v et G les valeurs trouvées au § 62, on obtient:

$$R = 2(2\mu\nu + \nu^2 - 2\mu - 2\nu).$$

Le rang de la courbe d étant ν et celui de la conique c_2 , qui est une courbe multiple, étant $\frac{\nu(\nu-1)}{2} \times 2$, il reste pour le degré de la focale $R - \nu - \nu(\nu-1)$; donc,

$$\underline{r} = 4\mu\nu + \nu^2 - 4\mu - 4\nu.$$

Autre manière de déterminer r . Les droites k , tangentes à la focale, engendrent une développable K . La section de cette développable K , par le plan V consiste en les 2μ droites l , qui, étant tangentes chacune à $\nu-2$ branches de la focale, comptent $\nu-2$ fois, et en une courbe restante b . Cette courbe b est, comme on l'a vu au § précédent, de l'ordre $\nu(2\mu + \nu - 4)$; donc:

$$\underline{r} = 2\mu(\nu-2) + \nu(2\mu + \nu - 4),$$

$$\underline{r} = 4\mu\nu + \nu^2 - 4\mu - 4\nu.$$

On peut déterminer le degré de la courbe b aussi en considérant le nombre des points de la courbe b , situés sur une tangente quelconque de la conique c_2 . Cette tangente rencontre la courbe b , $\nu(2\mu + \nu - 4)$ fois, puisque par son point de contact avec la conique c_2 , il passe ν droites l sur chacune desquelles se trouvent $2\mu + \nu - 4$ points de la focale, l étant $2\mu + \nu - 4$. (§§ 44, 62).

Troisième manière de déterminer r . La conique c_2 rencontre la développable K ,

1° aux 2μ points S ; par chaque point S il passe $\nu-2$ branches de la focale, laquelle est l'arête de rebroussement de la surface K ; ces branches y touchent la conique, donc un point S compte pour $(\nu-2) \times 2 \times 2$ intersections;

2° aux $10\mu - 6\nu + 6$ points où les droites l tangentes à la focale et à la courbe a en les points β_1 , rencontrent la conique c_2 ;

3° aux $\nu^2 - \nu - \mu - 3$ points G , où la focale rencontre la conique c_2 ; ces points comptent doubles puisque la focale est une courbe double de la surface K ;

4° aux points, où la conique c_2 rencontre une droite l , qui

touche la focale et provient de la singularité λ' ; nous avons vu au § précédent que les points λ' se réunissent tous aux points S , qui ont été déjà comptés sub 1°.

Le rang de la surface K est la moitié du nombre de ces intersections; donc :

$$\underline{r} = \frac{1}{2} \{ 8 \mu (\nu - 2) + 10 \mu - 6 \nu + 6 \iota + 2 \nu^2 - 2 \nu - 2 \mu - 6 \iota \},$$

$$\underline{r} = 4 \mu \nu + \nu^2 - 4 \nu - 4 \nu.$$

Détermination de \underline{v} . Par le même raisonnement que celui tenu au § 46 on trouve $\underline{v} = 0$.

§ 65. *Détermination de \underline{m} et de $\underline{\beta}$.* Chaque tangente à la courbe b est l'intersection du plan \underline{V} avec un plan \underline{o} tangent à la surface K et chaque plan \underline{o} tangent à la surface K coupe le plan V suivant une tangente à la courbe b . Le plan V n'est pas un plan \underline{o} , puisque le plan V ne coïncide pas avec un des plans \underline{o} qui touchent la surface K le long des génératrices k , situées dans le plan V (§ 36); donc, la classe \underline{m} de la surface K est égale à la classe de la courbe b . La classe \underline{m} de la courbe b est la moitié du nombre des tangentes communes aux courbes c_2 , et b .

Ces tangentes communes sont :

1° les 2μ droites l_ν ; chaque droite l_ν est une tangente d'inflexion de $\nu - 2$ branches de la courbe b , le point d'inflexion étant le point S où la droite l_ν touche la conique c_2 ; donc une droite l_ν compte pour $(\nu - 2) \times 3$ tangentes communes;

2° les 2ι droites d'intersection des plans α avec le plan V ; chacune de ces droites d'intersection touche la courbe b , $2 \mu + \nu - 4$ fois, puisque la droite l située dans le plan α correspondant, rencontre la focale $2 \mu + \nu - 4$ fois, l étant $2 \mu + \nu - 4$ (§ 62);

3° les droites d'intersection du plan V avec les plans \underline{o} osculateurs à la focale en les points stationnaires $\underline{\beta}'$, qui proviennent d'une singularité λ non située dans un des plans V ou W ;

4° les droites d'intersection du plan V avec les plans λ' pour lesquels la tangente commune aux courbes a et f n'est pas située dans le plan V ; ce nombre est zéro, comme on l'a trouvé au § 63; donc :

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \{ 6 \mu (\nu - 2) + 2 \iota (2 \mu + \nu - 4) + \underline{\beta}' \} \quad (A).$$

On obtient un point stationnaire de la focale à cause de la sin-

gularité λ ou à cause de la présence d'un point stationnaire κ sur la courbe d (§ 54); donc :

$$\underline{\beta} = \underline{\beta'} + \kappa. \quad (\text{B}).$$

Des formules de *Cayley-Plücker* on tire la relation :

$$\underline{\beta} = 3 \underline{(n - r)} + \underline{m} + \underline{v}. \quad (\text{C}).$$

Des formules A, B et C on déduit en tenant compte des valeurs obtenus pour les singularités \underline{n} , \underline{r} , et \underline{v} (§ 64) :

$$\underline{m} = 2 [3 \mu (\mu + \nu - 6) + \iota (2 \mu + \nu - 9) + 6 \nu],$$

$$\underline{\beta} = 2 (3 \mu + \iota) (2 \mu + \nu) - 57 \mu + 21 \nu - 27 \iota,$$

$$\underline{\beta'} = 2 (3 \mu + \iota) (2 \mu + \nu) - 60 \mu + 24 \nu - 28 \iota.$$

Pour vérifier ce résultat déterminons $\underline{\beta'}$ au moyen de la formule pour le calcul de λ donnée par E Pascal II *Geometria* p. 322 :

$$\lambda = n(r + 4) - 6(r + \beta) - 4(\omega + H) - 2v.$$

Si l'on substitue dans cette formule les expressions trouvées pour les singularités n , r , β , H , ω et v (§ 62), la formule devient $\lambda = 4 \{ (3 \mu + \iota) (\mu + \nu) - 18 \mu + 6 \nu - 8 \iota \}$.

Les points λ sont les points où l'arête de rebroussement a rencontre une nappe de la surface O . Parmi ces points de rencontre se trouvent :

1° les 2ι points α , situés sur la conique c_2 , où la courbe a rencontre $\nu - 2$ nappes de la surface O ;

2° les 2μ points S , situés sur la conique c_2 , où la courbe a rencontre également $\nu - 2$ nappes de la surface O , la courbe a a de commun avec chacune de ces nappes, trois points, puisque un point S est un point stationnaire β de la courbe a et parce que la nappe qu'elle rencontre touche sa tangente en le point S .

Dans le plan W se trouvent aussi des points λ , savoir les points κ de la courbe d , où deux branches de la courbe a rencontrent chacune deux nappes de la surface O . Chaque point κ compte, par conséquent pour quatre points λ . Dans la formule pour la valeur de λ on a déjà tenu compte de ces points λ , savoir : dans le terme $- 4 H$.

Le nombre des points λ non-situés dans les plans V et W est donc : $\lambda - 2 \iota (\nu - 2) - 2 \mu (\nu - 2)$. 3. Chaque point λ non situé dans un des plans V et W , donne un point stationnaire $\underline{\beta'}$ de la focale, donc :

$$\underline{\rho'} = 2 [(3 \mu + \iota) (2 \mu + \nu) - 30 \mu + 12 \nu - 14 \iota],$$

résultat conforme à celui que nous avons trouvé tout à l'heure.

Maintenant que sont connues les singularités \underline{n} , \underline{r} , \underline{m} , $\underline{\beta}$ et \underline{v} on peut déterminer les autres au moyen des formules de *Cayley-Plücker*.

§ 66. Pour résumer je fais suivre les formules trouvées aux §§ 62—65, qui expriment les singularités de la surface O et de la focale en fonction des singularités μ , ν et ι de la courbe d .

$$r = 2 (\mu + \nu).$$

$$m = 2 \nu$$

$$\alpha = 2 \iota$$

$$G = 2 \tau = \mu^2 - \mu - \nu - 3 \iota.$$

$$H = k = 3 (\mu - \nu) - \iota.$$

$$v = 0.$$

$$\omega = 0.$$

$$n = 2 (3 \mu + \iota)$$

$$x = 2 (\mu + \nu)^2 - 10 \mu - 2 \nu - 3 \iota.$$

$$y = 2 (\mu + \nu)^2 - 4 \mu - 4 \nu - \iota.$$

$$\beta = 12 \mu - 4 \nu + 6 \iota.$$

$$\lambda = 4 [(3 \mu + \iota) (\mu + \nu) - 18 \mu + 6 \nu - 8 \iota].$$

$$\lambda' = 4 \mu (\nu - 2).$$

$$R = 2 (2 \mu \nu + \nu^2 - 2 \mu - 2 \nu).$$

$$\underline{n} = 2 \mu^2 + 4 \mu \nu + \nu^2 - 11 \mu - \nu - 3 \iota = 2 \mu^2 + 4 \mu \nu - 10 \mu + 2 \tau.$$

$$\underline{r} = 4 \mu \nu + \nu^2 - 4 \mu - 4 \nu.$$

$$\underline{v} = 0$$

$$\underline{m} = (3 \mu + 2 \iota) (2 \mu + \nu) + 3 \mu \nu - 36 \mu + 12 \nu - 18 \iota = 6 \mu (\mu + \nu - 6) + 2 \iota (2 \mu + \nu - 9) + 12 \nu.$$

$$\underline{\beta} = 2 (3 \mu + \iota) (2 \mu + \nu) - 57 \mu + 21 \nu - 27 \iota = (3 \mu + \iota) (4 \mu + 2 \nu - 19) + 21 \nu - 8 \iota.$$

$$\underline{\alpha} = 6 (2 \mu + \iota) (2 \mu + \nu) - 4 \mu^2 - 2 \mu \nu - 2 \nu^2 - 107 \mu + 47 \nu - 57 \iota.$$

§ 67. En appliquant les formules du § 66 aux courbes du degré quatre, on obtient la table suivante.

μ	ν	δ	κ	ι	τ	r	m	α	n	G	\underline{n}	\underline{r}	\underline{m}	$\underline{\beta}$
4	3	0	3	0	1	14	6	0	24	2	42	29	60	99
4	4	1	2	2	1	16	8	4	28	2	58	48	108	138
4	5	2	1	4	2	18	10	8	32	4	76	69	164	185
4	6	3	0	6	4	20	12	12	36	8	96	92	228	240
4	6	0	2	8	1	20	12	16	40	2	90	92	248	242
4	7	1	1	10	4	22	14	20	44	8	102	117	324	309
4	8	2	0	12	8	24	16	24	48	16	136	144	408	384
4	9	0	1	16	10	26	18	32	56	20	156	173	532	481
4	10	1	0	18	16	28	20	36	60	32	184	204	636	576
4	12	0	0	24	28	32	24	48	72	56	240	272	912	816

CHAPITRE VII.

DE QUELQUES COURBES DÉRIVÉES DE LA COURBE d .

§ 68. *De la développée plane de la courbe d .* Considérons comme au § 10 une conique c'_2 , passant par les points I et J et ayant un contact d'ordre deux avec la courbe d . La droite ZE_1E_2 , qui joint les deux points E_1 et E_2 de l'arête de rebroussement a , correspondants à la conique c'_2 , rencontre le plan W dans le point d'intersection des deux tangentes à la conique c'_2 en les points I et J ; par conséquent, la projection des deux points conjugués E_1 et E_2 sur le plan W , le point Z étant le centre de projection est le pôle de la droite z , par rapport à la conique c'_2 , et la projection de l'arête de rebroussement a est le lieu des pôles de la droite z , par rapport aux coniques c'_2 .

Si maintenant on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini, on trouve que la projection orthogonale a' de l'arête de rebroussement a sur le plan W est le lieu des centres des cercles osculateurs, ou bien, est la développée plane de la courbe d .

Il passe par le point Z les plans σ osculateurs à la courbe a en les points S_w , où les 2ν droites l_w sont tangentes à la courbe d . Ces points S_w sont des points stationnaires β de l'arête de rebroussement a (§ 21), et se projettent en des points ordinaires de la projection a' . La tangente à la courbe a en un point S_w , étant une droite l_w située dans le plan W , cette droite l_w sera la tangente à la projection a' en le point S_w , ce qui donne les théorèmes suivants.

1° Une courbe est tangente à sa développée en les points de contact de ses tangentes isotropes.

2°. Les foyers de la courbe sont des foyers de la développée. (*Laurent*: *Traité d'Analyse*, II p. 108).

Réciproquement, les foyers de la développée sont des foyers de la courbe, car, si une tangente à la projection a' passe par le point I , il faut que les deux droites l , dont cette tangente est la projection, passent également par le point I , et les droites l passant par le point I sont des droites l_w , tangentes à la courbe d , qui coïncident avec leurs projections.

Un point stationnaire z de la courbe d étant un noeud H de la courbe a (§ 54), ce point est un point de la projection a' . Les deux branches de la courbe a , passant par le point z , se projettent en une seule branche de la courbe a' ; donc: un point stationnaire z de la courbe d est un point ordinaire de sa développée.

Les singularités de la courbe a étant connues (§ 66), on en déduit celles de sa projection a' . Le centre de projection Z n'étant pas situé sur la courbe a , le degré μ' de la projection a' est égal à $\frac{1}{2}n$, d'où $\mu' = \frac{1}{2} \times 2(3\mu + \iota) = 3\mu + \iota$.

Le point Z n'étant pas situé sur la développable O , chaque droite passant par le point Z rencontre $r = 2(\mu + \nu)$ tangentes à la courbe a , qui se projettent deux à deux en $\mu + \nu$ tangentes à la projection a' ; d'où $\nu' = \mu + \nu$.

On obtient une inflexion de la projection a' si par le point Z il passe un plan osculateur o ou si la courbe a possède une tangente stationnaire v ; m étant 2ν il ne passe par le point Z que les 2ν plans o , qui sont osculateurs en les 2ν points S_w . et $v = 0$. (§ 62), donc; $\iota' = 0$.

Les points stationnaires β de la courbe a se projettent deux à deux en des points stationnaires z' de la courbe a' , exceptés les 2ν points stationnaires S_w , qui sont situés sur la courbe d , donc:

$$z = \frac{1}{2} \{\beta - 2\nu\} = \frac{1}{2} \{12\mu - 4\nu + 6\iota - 2\nu\} = 6\mu - 3\nu + 3\iota = 3(3\mu + \iota) - 3(\mu + \nu).$$

Par conséquent, les singularités de la développée plane sont:

$$\mu' = 3\mu + \iota, \nu' = \mu + \nu, \iota' = 0, z' = 3(3\mu + \iota) - 3(\mu + \nu).$$

(*Salmon-Fiedler*: *Ebene curven* p. 122).

Les 2μ points stationnaires β de la courbe a , qui sont situés sur la conique c_2 (les points S), se projettent en μ points stationnaires de la développée. Ces μ points ont la droite de l'infini z pour tangente commune. Les 2ι points α de l'arête de rebroussement a , qui se trouvent sur la conique c_2 se projettent en les ι

points d'intersection restants de la droite de l'infini avec la développée.

Le cylindre projetant de la courbe a est l'enveloppe des plans normaux de la courbe d ou bien est la surface polaire de la courbe d .

§ 69. *Des développées gauches.* Chaque droite l est une droite isotrope, si la conique c_2 est le cercle imaginaire de l'infini, et, par conséquent, est perpendiculaire au plan isotrope o , passant par elle. Donc, chaque droite l coupe orthogonalement la tangente à la courbe d située dans le même plan o . Par conséquent, la courbe a est une développée gauche de la courbe d , ce qui démontre encore une fois que sa projection orthogonale a' , est la développée plane de la courbe d .

La longueur de la droite l , comptée de son point de contact avec la courbe a jusqu' à son point de rencontre avec la courbe d étant nulle, puisque cette distance est le rayon d'une sphère de rayon nul, les distances de deux points quelconques E et E' de la développée a à sa développante d sont égales, d'où il suit que la longueur de l'arc de la courbe a , compris entre ces deux points quelconques E et E' , est nulle, ou bien la courbe a est une courbe de longueur nulle (*Darboux*: Classe rem. p. 10).

Si au lieu de prendre pour la conique c_2 le cercle imaginaire de l'infini, on prend pour la conique c_2 une conique située dans le plan de l'infini et tangente au cercle imaginaire de l'infini en les points I et J , chaque droite l sera perpendiculaire à la tangente à la courbe d en le point où la droite l rencontre la courbe d , donc, pour ce choix de la conique c_2 , l'arête de rebroussement a est une développée gauche de la courbe d . Et inversement chaque développée gauche de la courbe d est en choisissant convenablement la conique c_2 , l'arête de rebroussement d'une développable O . En déterminant les singularités de la courbe a (§ 62), j'ai donc déterminé les singularités de toutes les développées gauches de la courbe d . Les points d'intersection d'une développée gauche a de la courbe d avec le plan W de la courbe d , sont les 2ν points S_w , où les tangentes isotropes touchent la courbe d et les κ points stationnaires de la courbe d . Les points S_w sont des points stationnaires de la développée a et les points κ en sont des noeuds, (§ 63).

§ 70. *Des courbes parallèles.* Les droites l , rencontrant une même conique c_2 bitangente au cercle imaginaire de l'infini, font toutes des angles égaux avec la direction du point Z , donc coupent aussi toutes sous un même angle le plan W normal à la direction du point Z . Par conséquent, le plan W et un plan W' , parallèle

au plan W interceptent sur toutes les droites l des segments de même longueur, et la courbe de section de la développable O par le plan W' est une courbe parallèle de la courbe d . Donc, les singularités d'une courbe parallèle d'une courbe d sont celles d'une section plane de la surface O ; (voir, *Salmon-Fiedler*; Ebene Curven).

Si la courbe d possède une focale plane f_1 , située dans un plan W_1 , la courbe p_1 , l'intersection de la surface O avec un plan parallèle au plan W_1 sera une courbe parallèle de la courbe f_1 . Les courbes parallèles des courbes d et f_1 auront les mêmes singularités. Ces courbes parallèles peuvent encore différer par la nature de leurs points à l'infini.

Exemple. Nous verrons plus tard qu'une cubique circulaire de la troisième classe d , dont le point réel à l'infini A , est un point d'inflexion, possède une focale plane f du quatrième degré et de la troisième classe, dont les points I et J sont des points stationnaires (voir *P. H. Schoute*: Comptes Rendus 6 Déc. 1897). Les courbes parallèles de ces deux courbes auront les mêmes singularités Plückériennes. Les points à l'infini de la courbe parallèle de la courbe d sont les points I et J , qui sont des points triples et le point A qui est un noeud (inflexions knoten), tandis que les points à l'infini de la courbe p_1 sont deux points quadruples, coïncidant avec les points circulaires du plan W_1 .

Soient d et c_2 des courbes réelles, alors la surface O sera réelle également et chaque section s par un plan quelconque sera une courbe réelle. Si maintenant on remplace la conique c_2 par le cercle imaginaire de l'infini la courbe s restant réelle, la surface O devient la développable focale (*Darboux*: Classe rem.) de la courbe s . La courbe primitive d et sa focale f feront partie de la focale de la courbe s .

On voit facilement, que la figure symétrique de la développable O par rapport au plan W est une seconde développable focale O' de la courbe s , de sorte que la focale de la courbe s consiste, 1° en la courbe d et sa figure symétrique, 2° en la courbe f et sa figure symétrique, 3° en la courbe d'intersection des deux développables O et O' , autre que la courbe s elle même.

La réciprocité entre la courbe s et sa focale (§ 5) n'existe plus que pour la partie de la focale nommée sub 3°.

En appliquant ces résultats à une courbe parallèle p d'une courbe d , dont la focale est une courbe f , on trouve, que la focale de la courbe p consiste, 1° en deux courbes d situées en des plans parallèles au plan de la courbe p , 2° en deux courbes f , 3° en une cinquième courbe pour laquelle le plan de la courbe p est un plan de symétrie.

On démontre facilement les théorèmes suivants.

1° Une développée gauche d'une courbe parallèle p se décompose toujours en deux courbes dont l'une est la figure symétrique de l'autre par rapport au plan de la courbe p .

2° La courbe parallèle de la courbe parallèle p se décompose toujours en deux courbes parallèles de la courbe d .

3° Si la développable focale d'une courbe plane d se décompose, ce qui ne peut être qu'en deux figures symétriques, les développées gauches et les courbes parallèles de la courbe d se décomposent également, et réciproquement.

4° De chaque courbe simple tracée sur la développable focale O , la développable focale et la focale se décomposent. De cette focale font partie la courbe d et sa focale.

§ 71. *Du lieu des centres des cercles bitangents et du lieu des points pour lesquels deux tangentes sont égales.* Nous avons vu au § 8 que la projection orthogonale de la focale sur le plan de la courbe d est le lieu des centres des cercles bitangents.

Les singularités de la focale étant connues (§ 66) on en déduit comme aux §§ 47, 53 et 57 celles de sa projection f' . On trouve alors que les singularités du lieu f' des centres des cercles bitangents sont:

$$\begin{aligned}\frac{\mu'}{\nu'} &= \frac{1}{2} n = \mu^2 + 2 \mu \nu - 5 \mu + \tau. \\ \frac{\nu'}{\nu} &= \frac{1}{2} (\bar{r} - \nu^2) = 2 \mu \nu - 2 \mu - 2 \nu. \\ \frac{x'}{x} &= \frac{1}{2} (\bar{\beta} - x) = \frac{1}{2} \beta' = (3 \mu + \nu) (2 \mu + \nu) - 30 \mu + 12 \nu - 14 \tau. \\ \frac{\iota'}{\iota} &= \frac{1}{2} (\bar{m} - 3 \nu^2 - x) = 3 \mu (\mu + \nu - 7) + \nu (2 \mu + \nu - 14) + 6 \nu - 3 \tau.\end{aligned}$$

Soit comme au § 8 F un point de la focale, soit la conique c'_2 un cercle bitangent à la courbe d correspondant au point F , et soient R_1 et R_2 les points de contact.

La tangente k à la focale en le point F rencontre le plan W dans un point L , où se rencontrent les tangentes à la courbe d en les points R_1 et R_2 (§ 8). Les deux droites LR_1 et LR_2 sont en même temps des tangentes au cercle c'_2 et, par conséquent, sont égales, ce qui donne le théorème:

La courbe nodale s de la développable K (§§ 44, 48), située dans le plan W est le lieu des points pour lesquels deux des tangentes, que l'on peut mener à la courbe d sont égales entre elles.

Les singularités de la développable K , étant connues (§ 66), on en déduit, comme aux §§ 48 et 58, celles de la courbe d'inter-

section \underline{s} . On trouve alors, que les singularités du lieu \underline{s} , des points pour lesquels deux tangentes à la courbe d sont égales, sont:

$$\overline{\mu''} = \frac{1}{2}(\underline{r} - \underline{x}) = 2\mu\nu - 3\mu + \tau + \iota.$$

$$\overline{\nu''} = \frac{1}{2}\overline{m} = 3\mu(\mu + \nu - 6) + \iota(2\mu + \nu - 9) + 6\nu.$$

$$\overline{x''} = 2\nu(\mu - 2) + 2\delta.$$

$$\overline{\iota''} = \frac{1}{2}(\underline{\alpha} - \underline{\nu}^2) = 3(2\mu + \iota)(2\mu + \nu) - 2\mu^2 - \mu\nu - 55\mu + 22\nu - 33\iota - 3\tau.$$

Les tangentes à la courbe d en les points x font encore partie du lieu.

Si la focale consiste en une ou plusieurs courbes planes le lieu \underline{s} consiste en une ou plusieurs droites.

§ 72. *Du point Z comme centre de la développable O .* Nous avons vu aux §§ 8 et 10 que le point Z et le plan W sont conjugués harmoniques par rapport aux couples de points conjugués de la focale f et de l'arête de rebroussement a . Si donc on prend pour le plan de l'infini le plan W , le point Z sera un centre de symétrie des courbes f , a , c_2 et b et des développables O et K .

Corollaires.

1° Si la focale est de degré impair elle passe par le point Z , et réciproquement.

2° Si la focale est une courbe plane ou consiste en une courbe plane et quelques courbes gauches, le plan de la partie plane de la focale passe par le point Z , et le point Z devient un centre de symétrie de cette partie plane et de la partie gauche si le plan W devient le plan de l'infini.

3° Si plusieurs courbes planes font partie de la focale, les plans de ces focales planes passent par le point Z ou ces focales planes sont situées deux à deux dans des plans parallèles si on prend le plan W pour le plan de l'infini.

4° Si la courbe d possède une focale plane f' , dont le plan W' passe par le point Z , la courbe d sera une courbe à centre, en prenant pour droite de l'infini du plan W , son intersection avec le plan W' , le centre de la courbe d étant le pôle Z' de l'intersection des plans W' et V , par rapport à la conique c_2 . Si le plan W' devient le plan de l'infini, le point Z' devient aussi le centre de la conique c_2 .

5°. Si la courbe d est une conique à centre d_2 , la développable O possède quatre coniques nodales (§§ 22—25). Si le plan d'une de ces quatre coniques nodales devient le plan de l'infini, les

trois autres coniques nodales auront le même centre. Si la conique c_2 devient le cercle imaginaire de l'infini, le centre de la conique d_2 est le centre des coniques focales, de la courbe a et de la développable focale O .

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Heerenveen 1902.

W. A. VERSLUYS.

(1 April 1903).

Table des Matières de la première partie.

	blz.
CHAPITRE I — Introduction.	
§ 1. But. Méthode	3
§ 2. De la développable O , dont la courbe donnée et sa focale sont des courbes nodales.	3
§ 3. Notations	4
§ 4. De la courbe nodale de la surface O	5
§ 5. De la réciprocité entre la courbe et sa focale.	6
§ 6. Des projections de la courbe d sur le plan V	7
§ 7. Des inverses des théorèmes précédents.	8
CHAPITRE II. — Des focales de courbes planes	
§ 8. Des foyers conjugués	9
§ 9. Des intersections de la focale avec le plan W	11
§ 10. De la symétrie de la courbe a	11
CHAPITRE III. — Des focales de coniques.	
Section I. — La conique n'occupe pas de position particulière, par rapport au plan V , ni par rapport aux points I et J .	
§ 11. Détermination de r	13
§ 12. Détermination de m	14
§ 13. Détermination de α	14
§ 14. Détermination de H	15
§ 15. Détermination de G	15
§ 16. Détermination de v	16
§ 17. Détermination de ω	16
§ 18. Détermination des autres singularités	16
§ 19. Des intersections de l'arête de rebroussement a avec le plan V	17
§ 20. Des points S	18
§ 21. Les points S sont des points stationnaires β	19

§ 22. La focale d'une conique se décompose en deux coniques.....	19
§ 23. Deuxième démonstration de cette décomposition....	21
§ 24. Troisième démonstration de cette décomposition....	21
§ 25. Quatrième démonstration de cette décomposition....	22
Section II. — Positions particulières de la conique d_2 .	
§ 26. La focale d'une parabole est une parabole.....	23
§ 27. La conique d_2 est tangente au plan V en le point I .	24
§ 28. La conique d_2 est située dans un plan isotrope.....	25
§ 29. De la focale d'un cercle.....	26

CHAPITRE IV — De la focale d'une cubique plane sans singularités.

§ 30. Des sections de la surface O par les plans V et W .	27
§ 31. Détermination de m et de α	28
§ 32. Détermination de v , de ω , de G et de H	29
§ 33. Détermination des autres singularités.....	30
§ 34. Des intersections de la courbe α avec les plans V et W .	30
§ 35. Des intersections de la focale avec le plan W	31
§ 36. Des intersections de la focale avec le plan V	32
§ 37. Des points stationnaires β	33
§ 38. Des points stationnaires β_1	34
§ 39. Des points singuliers de la focale.....	35
§ 40. Détermination de λ et de $\underline{\beta}$	37
§ 41. Détermination de λ'	38
§ 42. Détermination de l	39
§ 43. Discussion de y ; des directrices.....	40
§ 44. Détermination de \underline{r}	42
§ 45. Détermination de \underline{m}	44
§ 46. Détermination de \underline{v} et de $\underline{\omega}$ et des autres singularités de la focale.....	44
§ 47. De la projection de la focale sur le plan W	45
§ 48. De la section s de la surface K par le plan W ...	46
§ 49. De la section \bar{b} de la surface K par le plan V ...	48

CHAPITRE V. — Des focales de quelques courbes rationnelles.

Section I. — De la focale d'une cubique de la classe quatre.

§ 50. Des noeuds de la courbe donnée et des génératrices doubles ω	50
---	----

blz.

§ 51. Détermination des singularités de la surface O	51
§ 52. Détermination des singularités de la focale.....	53
§ 53. De la projection f' de la focale sur le plan W ...	55
Section II. — De la focale d'une cubique de la troisième classe	
§ 54. Des points stationnaires de la courbe d et des génératrices stationnaires v	55
§ 55. Détermination des singularités de la surface O	56
§ 56. Détermination des singularités de la focale.....	57
§ 57. De la projection f' de la focale sur le plan W ...	59
§ 58. De la section s de la surface K par le plan W ...	60
Section III. — De la focale d'une courbe du degré quatre et de la classe trois.	
§ 59. Des tangentes doubles τ de la courbe d et des plans doubles G	61
§ 60. Détermination des singularités de la surface O	62
§ 61. Détermination des singularités de la focale.....	63

CHAPITRE VI. — De la focale de la courbe plane d'ordre μ et de position générale.

§ 62. Détermination des singularités de la développable O .	64
§ 63. Discussion de u , de y , de β et de λ'	67
§ 64. Détermination de \underline{n} , de \underline{r} et de \underline{v}	69
§ 65. Détermination de \underline{m} et de $\underline{\beta}$	71
§ 66. Table des formules obtenues.....	73
§ 67. Table des valeurs numériques obtenues en appliquant les formules trouvées aux courbes du degré quatre.	73

CHAPITRE VII. — De quelques courbes dérivées de la courbe d .

§ 68. De la développée plane de la courbe d	74
§ 68. Des développées gauches de la courbe d	76
§ 70. Des courbes parallèles.....	76
§ 71. Du lieu des centres des cercles bitangents et du lieu des points pour lesquels deux tangentes sont égales.	78
§ 72. Du point Z comme centre de la surface O ..	79

La Dépendance ou l'Indépendance

d'un système
d'équations algébriques,

PAR

K. BES,

Professeur à l'école moyenne de l'Etat „Willem II” à Tilbourg.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel VIII. N° 6.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

1904.

TABLE DES MATIÈRES.

La dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques.	5
I. Formes binaires.	6
II. Formes ternaires.	8
1. Trois équations non-homogènes à deux variables.	8
2. Deux équations non-homogènes à deux variables.	12
III. Formes quaternaires.	18
IV. La dépendance ou l'indépendance des fonctions algébriques.	20
Appendices.	22
1. Les solutions d'un système de n équations non-homogènes à n variables appartenant au domaine de l'infini.	22
2. Les solutions d'un système de n équations non-homogènes à n variables ayant un élément commun.	23
3. Combien de et quels déterminants d'un assemblant doivent s'annuler, pour que ce soit le cas avec tous les déterminants de cet assemblant.	24
4. Les relations qui doivent exister entre les coefficients de $n + 1$ équations homogènes à n variables, pour que ces équations admettent une solution commune.	26
Errata du mémoire „Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables”	29

La dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques.

§ 1. La théorie de la dépendance ou de l'indépendance d'équations algébriques a été fondée par Jacobi dans son mémoire intitulé „De determinantibus functionalibus” (Journal de Crelle, tome 22), où il dit:

Voco aequationes a se independentes, quarum nulla neque ipsa identica est neque reliquarum ope ad identicam reduci potest.

Il nomme donc indépendantes entre elles quelques équations, si aucune n'est identique d'elle-même ou ne peut être rendue identique au moyen des autres.

Cela veut dire en d'autres termes que m équations à n variables, où m n'est pas supérieur à n (les équations supposées rendues homogènes), sont dépendantes ou indépendantes, selon qu'on obtient une équation identique ou non-identique en éliminant $m-1$ variables entre ces équations.

En partant de cette définition nous voulons considérer la dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques.

En général, nous supposerons les équations comme étant non-homogènes. S'il nous semble nécessaire, il sera aisé de les rendre homogènes.

§ 2. Dans le cas où le nombre des équations est égal à celui des variables qui y entrent, après avoir rendu les équations homogènes, la seule condition, pour que les équations soient dépendantes, consiste en ce que leur résultant s'annule.

Dans le cas où le nombre des équations, rendues homogènes, est inférieur à celui des variables, il faut et il suffit que tous les coefficients des équations finales s'annulent, pour que les équations données soient dépendantes.

Il semble que le cas où le nombre des équations, rendues homogènes, est supérieur à celui des variables, se déduit du cas où ces nombres sont égaux. En effet, chaque équation de plus exige une

condition nouvelle, pour que cette équation dépende des autres, mais ce cas donne encore lieu à une autre considération ¹⁾.

La recherche de la dépendance des équations a donc un grand rapport à celle des solutions communes à ces équations.

Les conditions pour la dépendance des équations données étant remplies, nous nous proposons de montrer comment on détermine pour tout cas possible la relation de dépendance qui existe entre ces équations.

I. Formes binaires.

§ 3. Le seul cas à considérer est celui d'un système de deux équations non-homogènes à une variable.

Il s'agit dans ce cas de déterminer le résultant de ces équations et la relation de dépendance existant entre elles, si leur résultant s'annule. De plus, il est nécessaire de considérer tous les cas possibles touchant le nombre des solutions communes à ces équations.

§ 4. Soient les équations données:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &\equiv a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \\ \psi &\equiv b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Les premiers membres de ces équations sont liés par une relation ne contenant pas explicitement les variables. On obtient cette relation en éliminant x entre les équations:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 x + a_3 - \varphi &= 0, \\ b_1 x^2 + b_2 x + b_3 - \psi &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2),$$

d'où l'on obtient:

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 - \varphi & a_2 & b_3 - \psi & b_2 \\ & a_3 - \varphi & & b_3 - \psi \end{array} \right| = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ou

$$\begin{aligned} (b_1 \varphi - a_1 \psi)^2 + 2 (a_1 b_3 - a_3 b_1) (b_1 \varphi - a_1 \psi) \\ - (a_1 b_2 - a_2 b_1) (b_2 \varphi - a_2 \psi) = 0 \dots\dots (4). \end{aligned}$$

¹⁾ Voir l'Appendice 4 de ce mémoire.

§ 5. Pour former le résultant des équations (1), on prend, comme on sait, 3 pour le degré de la fonction ¹⁾:

$$F \equiv \Phi \varphi + \Psi \psi \dots \dots \dots (5),$$

dans laquelle

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\equiv s_1 x + s_2, \\ \Psi &\equiv s_3 x + s_4, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6),$$

où les coefficients sont d'abord indéterminés.

On obtient par là l'assemblant de la fonction F :

$$\begin{array}{c|cccc} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline x^3 & a_1 & & b_1 & \\ x^2 & a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ x & a_3 & a_2 & b_3 & b_2 \\ 1 & & a_3 & & b_3 \end{array} \dots \dots \dots (7),$$

d'où l'on déduit la condition nécessaire pour la dépendance des équations données:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 \\ & a_3 & & b_3 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (8).$$

Dans le cas où les équations (1) admettent une seule solution commune, on obtient cette solution en résolvant l'équation:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \dots \dots \dots (9).$$

La relation de dépendance entre les équations données s'exprime dans ce cas par l'équation:

$$(s_1 x + s_2) \varphi + (s_3 x + s_4) \psi \equiv 0 \dots \dots \dots (10),$$

¹⁾ Voir: Théorie générale de l'élimination [Verhandelingen der Kon. Akad. van Wetensch. (Eerste Sectie), deel VI, n°. 7], § 71.

où les symboles s ont les valeurs suivantes:

s_1

s_2

s_3

s_4

...

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ a_1 b_2 b_1 \\ a_2 b_3 b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 b_1 \\ a_3 b_3 b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 a_1 b_1 \\ a_3 a_2 b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 a_1 b_2 \\ a_3 a_2 b_3 \end{vmatrix} \dots (11).$$

On déduit facilement de la relation (10) que l'on a, à un facteur constant près:

$$\varphi \equiv (s_3 x + s_4) \left\{ \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} \right\},$$
$$\psi \equiv (s_1 x + s_2) \left\{ \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} \right\},$$

.....(12).

Dans le cas où les équations données admettent deux solutions communes, tous les déterminants de l'assemblant:

s_1

s_2

x^2

x

1

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

s'annulent, et les équations données sont liées par la relation linéaire:

$$b_1 \varphi - a_1 \psi \equiv 0 \dots \dots \dots (14).$$

II. Formes ternaires.

§ 6. Les formes ternaires mènent à considérer trois ou deux équations simultanées à deux variables.

1. Trois équations non-homogènes à deux variables.

§ 7. Soient les équations données:

$$\varphi \equiv a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 x + a_4 y^2 + a_5 y + a_6 = 0,$$
$$\psi \equiv b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 x + b_4 y^2 + b_5 y + b_6 = 0,$$
$$\chi \equiv c_1 x + c_2 y + c_3 = 0,$$

.....(15).

Les fonctions φ , ψ et χ sont liées par une relation où les variables n'entrent pas explicitement. On obtient cette relation en éliminant x et y entre les trois équations:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 x + a_4 y^2 + a_5 y + a_6 - \varphi &= 0, \\ b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 x + b_4 y^2 + b_5 y + b_6 - \psi &= 0, \\ c_1 x + c_2 y + c_3 - \chi &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (16).$$

Le résultat de cette élimination s'obtient de l'équation (19) en y substituant aux a_6 , b_6 , c_3 respectivement $a_6 - \varphi$, $b_6 - \psi$, $c_3 - \chi$.

§ 8. Le résultant des équations (15), que l'on obtient des deux assemblants suivants ¹⁾:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}		
x^3	a_1			b_1			c_1							
x^2y	a_2	a_1		b_2	b_1		c_2	c_1						
x^2	a_3		a_1	b_3		b_1	c_3		c_1					
xy^2	a_4	a_2		b_4	b_2			c_2		c_1				
xy	a_5	a_3	a_2	b_5	b_3	b_2		c_3	c_2		c_1	(17),	
x	a_6		a_3	b_6		b_3			c_3			c_1		
y^3		a_4			b_4					c_2				
y^2		a_5	a_4		b_5	b_4				c_3	c_2			
y		a_6	a_5		b_6	b_5					c_3	c_2		
1			a_6			b_6						c_3		
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}		
l_1	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$					a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6(18),
l_2				$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	

égalé à zéro, forme la condition, pour que ces équations soient dépendantes ²⁾:

¹⁾ Voir: Théorie générale de l'élimination, § 107.

²⁾ Nous supposons $\begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ b_5 & b_6 \end{vmatrix}$ différent de zéro.

$$\begin{vmatrix}
 a_1 & & b_1 & & c_1 & & \\
 a_2 & a_1 & & b_2 & b_1 & c_2 & c_1 \\
 a_3 & & a_1 & b_3 & & b_1 & c_3 & c_1 \\
 a_4 & a_2 & & b_4 & b_2 & & c_2 & c_1 \\
 a_5 & a_3 & a_2 & b_5 & b_3 & b_2 & c_3 & c_2 \\
 a_6 & & a_3 & b_6 & & b_3 & & c_3 \\
 & a_4 & & & b_4 & & & c_2 \\
 & a_5 & a_4 & & b_5 & b_4 & & c_3 \\
 & a_6 & a_5 & & b_6 & b_5 & & \\
 & & a_6 & & & b_6 & &
 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ b_5 & b_6 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (19).$$

Dans le cas où les équations (15) admettent une seule solution commune, on obtient cette solution en résolvant les équations:

$$\left. \begin{aligned} p_6 y + p_5 &= 0, \\ -p_6 x + p_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20),$$

dans lesquelles les symboles p représentent des déterminants désignés ¹⁾ de l'assemblant:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\
 \hline
 x^2 & a_1 & b_1 & c_1 & & \\
 xy & a_2 & b_2 & c_2 & c_1 & \\
 x & a_3 & b_3 & c_3 & & c_1 \\
 y^2 & a_4 & b_4 & & c_2 & \\
 y & a_5 & b_5 & & c_3 & c_2 \\
 1 & a_6 & b_6 & & & c_3
 \end{array} \dots\dots\dots (21).$$

La relation de dépendance entre les équations données est la suivante:

$$(s_1 x + s_2 y + s_3) \varphi + (s_4 x + s_5 y + s_6) \psi + (s_7 x^2 + s_8 xy + s_9 x + s_{10} y^2) \chi \equiv 0 \dots\dots (22),$$

dans laquelle les symboles s représentent les déterminants successifs de l'assemblant:

¹⁾ Nous supposons que p_c ne s'annule pas.

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 & \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & c_2 & c_1 \\ a_3 & & a_1 & b_3 & b_1 & c_3 & c_1 \\ a_4 & a_2 & & b_4 & b_2 & & c_2 & c_1 \\ a_5 & a_3 & a_2 & b_5 & b_3 & b_2 & c_3 & c_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & (23), \\ a_6 & & a_3 & b_6 & & b_3 & & c_3 & \\ & a_4 & & & b_4 & & & & c_2 \\ & a_5 & a_4 & & b_5 & b_4 & & & c_3 \\ & a_6 & a_5 & & b_6 & b_5 & & & \end{array} \right|$$

formé par la suppression des deux dernières colonnes et de la dernière ligne dans l'assemblant (17).

Dans le cas où les équations (15) admettent deux solutions communes, tous les déterminants de l'assemblant (21) s'annulent. Les équations (15) sont dans ce cas liées par la relation:

$$s_1 \varphi + s_2 \psi + (s_3 x + s_4 y + s_5) \chi = 0 \dots \dots \dots (24)$$

dans laquelle les symboles s représentent les déterminants successifs de l'assemblant:

$$\left| \begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & & c_1 \\ a_4 & b_4 & & c_2 \end{array} \right| \dots \dots \dots (25),$$

formé par les quatre premières lignes de l'assemblant (21), tandis que les deux solutions communes sont déterminées par les équations:

$$\left. \begin{array}{l} p_{5,6} y^2 + p_{4,6} y + p_{4,5} = 0, \\ - p_{5,6} x + p_{3,6} y + p_{3,5} = 0, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (26),$$

dans lesquelles les symboles p sont des déterminants désignés ¹⁾ de l'assemblant:

¹⁾ La deuxième équation (26) est la même que la troisième équation (15).
 Dans le cas où $p_{5,6}$ ou c_1 s'annule, les deux solutions communes aux équations (15) sont déterminées par les deux équations:

$$\begin{array}{l} c_2 y + c_3 = 0, \\ - p_{3,6} x^2 + p_{1,6} x + p_{1,3} = 0. \end{array}$$

	s_1	s_2	s_3	s_4	
x^2	a_1	c_1			
xy	a_2	c_2	c_1		
x	a_3	c_3	c_1	(27).
y^2	a_4		c_2		
y	a_5		c_3	c_2	
1	a_6			c_3	

2. Deux équations non-homogènes à deux variables.

§ 9. Dans ce cas il s'agit d'éliminer l'une quelconque des variables. Les coefficients des équations finales, que l'on obtient ainsi, doivent s'annuler.

Pour obtenir les équations finales, on forme l'assemblant des coefficients des équations proposées, prenant le produit des degrés de ces équations pour le degré de la fonction L' .

Remarquons d'abord qu'il ne suffit pas pour la dépendance des équations données que les déterminants de cet assemblant qui forment les coefficients d'une équation finale désignée s'annulent, mais qu'il faut que ce soit le cas avec tous les déterminants de cet assemblant.

Si le cas mentionné se présentait, les équations données admettraient des solutions communes ayant un élément commun ¹⁾.

Pour que les équations données soient dépendantes, il faut et il suffit que tous les coefficients d'une équation finale désignée et pareillement ceux d'une équation terminale contenant la troisième variable dans un seul terme, s'annulent. Si ces coefficients obtiennent la valeur zéro, les coefficients de toutes les autres équations résultantes découlant des mêmes assemblants s'annulent également.

Il semble donc qu'un total de $2lm + 1$ conditions est exigé, pour que deux équations, respectivement des degrés l et m , soient dépendantes, mais il est évident que ce nombre peut se réduire dans tout cas à $lm + 1$, le nombre des déterminants qui doivent s'annuler, pour que ce soit le cas avec tous les déterminants de l'assemblant de la fonction L' , prenant $l + m - 1$ pour le degré de cette fonction ²⁾.

¹⁾ Comparer: Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables [Verhandelingen der Kon. Akad. van Wetensch. (Eerste Sectie), deel VIII, n°. 2], § 26.

²⁾ Voir: l'Appendice 3 de ce mémoire.

La relation de dépendance s'obtient de manière analogue à celle du paragraphe précédent. Elle nous montrera que les premiers membres des équations données ont un commun facteur, si ces équations sont dépendantes ¹⁾.

De là découle que tous les déterminants contenus dans l'assemblant de la fonction F , prenant $l + m - 1$ pour le degré de cette fonction, doivent s'annuler, pour que les équations données soient dépendantes.

§ 10. Soient les équations données:

$$\begin{cases} \varphi \equiv a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 x + a_4 y^2 + a_5 y + a_6 = 0, \\ \psi \equiv b_1 x + b_2 y + b_3 = 0, \end{cases} \dots\dots (28).$$

En général, il n'existe pas entre φ et ψ une relation dépourvue des variables x et y explicitement, car on ne peut éliminer x et y en général entre les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 x + a_4 y^2 + a_5 y + a_6 - \varphi = 0, \\ b_1 x + b_2 y + b_3 - \psi = 0, \end{cases} \dots\dots (29).$$

Pour construire les équations finales et les autres équations résultantes des équations (28), on forme l'assemblant des coefficients:

	s_1	s_2	s_3	s_4	
x^2	a_1	b_1			
xy	a_2	b_2	b_1		
x	a_3	b_3	b_1		$\dots\dots\dots (30),$
y^2	a_4	b_2			
y	a_5	b_3	b_2		
1	a_6		b_3		

prenant 2 pour le degré de la fonction F^2).

Dans le cas qui nous occupe, où les équations données sont dépendantes, tous les déterminants de l'assemblant (30) doivent s'annuler, et ces équations sont liées par la relation:

$$s_1 \varphi + (s_2 x + s_3 y + s_4) \psi \equiv 0 \dots\dots\dots (31),$$

dans laquelle les symboles s ont les valeurs:

¹⁾ Comparer: J. Molk, Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination (Acta Mathematica 6, 1885), chap. II, § 2.

²⁾ Voir: L'équation finale [Verhandelingen der Kon. Akad. van Wetensch. (Eerste Sectie), deel VIII, n°. 1], § 16.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} s_1 & & s_2 & & s_3 & & s_4 \\ \hline \left| \begin{array}{cc} b_1 & \\ b_2 & b_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right| & = & \left| \begin{array}{cc} a_1 & \\ a_2 & b_1 \\ a_3 & b_1 \end{array} \right| & = & \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & \\ a_3 & b_3 & b_1 \end{array} \right| & = & \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & b_1 \\ a_3 & b_3 & \end{array} \right| \end{array} \quad (32)$$

ou

$$\frac{s_1}{b_1^2} = \frac{s_2}{a_1 b_1} = \frac{s_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{s_4}{a_1 b_3 - a_3 b_1} \dots \dots \dots (33).$$

La relation de dépendance (31) montre que la fonction φ est divisible par la fonction ψ et par $s_2 x + s_3 y + s_4$.

§ 11. Pour bien faire comprendre les particularités qui peuvent se présenter dans ce cas, il faut considérer un exemple où l'équation finale soit d'un degré plus haut.

Prenons donc les équations:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 x + a_4 y^2 + a_5 y + a_6 = 0 \\ \psi = b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 x + b_4 y^2 + b_5 y + b_6 = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (34),$$

et 4 pour le degré de la fonction F , on obtient, si a_6 est différent de zéro, l'assemblant des coefficients:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
x^4	a_1						b_1				
$x^3 y$	a_2	a_1					b_2	b_1			
x^3	a_3		a_1				b_3		b_1		
$x^2 y^2$	a_4	a_2		a_1			b_4	b_2		b_1	
$x^2 y$	a_5	a_3	a_2		a_1		b_5	b_3	b_2		b_1
x^2	a_6		a_3			a_1	b_6		b_3		
xy^3		a_4		a_2			b_4		b_2		
xy^2		a_5	a_4	a_3	a_2		b_5	b_4	b_3	b_2	
xy		a_6	a_5		a_3	a_2	b_6	b_5		b_3	
x			a_6			a_3		b_6			
y^4				a_4					b_4		
y^3				a_5	a_4				b_5	b_4	
y^2				a_6	a_5	a_4			b_6	b_5	
y					a_6	a_5				b_6	
1						a_6					

(35),

dont tous les déterminants sont divisibles, comme on sait, par a_6 ¹⁾.

¹⁾ Voir: L'équation finale, § 16, 3.

Les déterminants de cet assemblant forment les coefficients des équations finales et des autres équations résultantes. Si tous ces déterminants s'annulent, les équations (34) sont dépendantes.

§ 12. Comme la relation:

$$(s_1 x^2 + s_2 xy + s_3 x + s_4 y^2 + s_5 y + s_6) \varphi + (s_7 x^2 + s_8 xy + s_9 x + s_{10} y^2 + s_{11} y) \psi = 0 \dots \dots (36)$$

ne peut être vérifiée en prenant

$$\begin{cases} \psi = s_1 x^2 + s_2 xy + s_3 x + s_4 y^2 + s_5 y + s_6, \\ \varphi = s_7 x^2 + s_8 xy + s_9 x + s_{10} y^2 + s_{11} y \end{cases} \dots \dots (37),$$

car a_6 est différent de zéro, on en conclut que les fonctions φ et ψ ont un commun facteur dans le cas considéré.

La relation de dépendance (36) se réduit donc à

$$(s_1 x + s_2 y + s_3) \varphi + (s_4 x + s_5 y + s_6) \psi = 0 \dots \dots \dots (38),$$

dans laquelle les symboles s représentent les déterminants successifs de l'assemblant:

$$\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 & & \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & \\ a_3 & a_1 & b_3 & b_1 & \\ a_4 & a_2 & b_4 & b_2 & \\ a_5 & a_3 & a_2 & b_5 & b_3 & b_2 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (39),$$

formé par les cinq premières lignes de l'assemblant:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
x^3	a_1			b_1		
$x^2 y$	a_2	a_1		b_2	b_1	
x^2	a_3		a_1	b_3		b_1
xy^2	a_4	a_2		b_4	b_2	
xy	a_5	a_3	a_2	b_5	b_3	b_2
x	a_6		a_3	b_6		b_3
y^3		a_4			b_4	
y^2		a_5	a_4		b_5	b_4
y		a_6	a_5		b_6	b_5
1			a_6			b_6

\dots \dots \dots (40).

D'après la relation (38), tous les déterminants de l'assemblant (40) doivent s'annuler.

La fonction Φ est donc divisible par $s_4 x + s_5 y + s_6$ et la fonction ψ par $s_1 x + s_2 y + s_3$. Ces divisions faites, on obtient l'une et l'autre fois leur plus grand commun diviseur ¹⁾.

§ 13. On peut encore évaluer le plus grand commun diviseur des fonctions Φ et ψ en construisant les équations terminales des équations (34). Pour cela on peut se servir de l'assemblant:

	$s_1 \quad s_2$	
x^2	$a_1 \quad b_1$	
xy	$a_2 \quad b_2$	
x	$a_3 \quad b_3$ (41),
y^2	$a_4 \quad b_4$	
y	$a_5 \quad b_5$	
1	$a_6 \quad b_6$	

d'où l'on déduit les équations terminales suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} xy + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} y^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix} &= 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} xy + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (42).$$

Les premiers membres de ces équations doivent être divisibles par le plus grand commun diviseur des fonctions φ et ψ ²⁾. En écrivant ces équations dans la forme suivante:

¹⁾ De l'évanouissement de tous les déterminants de l'assemblant (40) et également de ceux de l'assemblant (35) on déduit facilement que les trois déterminants:

$$\begin{vmatrix} a_6 & b_6 \\ a_5 & a_6 b_6 b_6 \\ a_6 & a_5 b_6 b_6 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & a_1 b_3 b_1 \\ a_6 & a_3 b_6 b_3 \\ a_6 & b_6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_1 b_2 b_1 \\ a_4 & a_2 b_4 b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

s'annulent dans le cas où les équations (34) sont dépendantes.

Cependant, l'évanouissement de ces déterminants n'entraîne pas la dépendance des équations (34), mais seulement l'existence de solutions communes dont l'un des éléments est nul ou dont les deux éléments sont infinis.

²⁾ Cela découle de l'identité: $P = \Phi\varphi + \Psi\psi$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| y + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| x + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{array} \right| y^2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{array} \right| y + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_6 & b_6 \end{array} \right| = 0, \\ \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{array} \right| x^2 + \left| \begin{array}{cc} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{array} \right| x - \left| \begin{array}{cc} a_4 & b_4 \\ a_6 & b_6 \end{array} \right| + \left\{ \left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{array} \right| x - \left| \begin{array}{cc} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{array} \right| \right\} y = 0, \end{array} \right. \quad (43)$$

on voit facilement que la première est divisible par $\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| y + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right|$
et la seconde par $\left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{array} \right| x - \left| \begin{array}{cc} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{array} \right|$.

En divisant par ces facteurs on obtient l'une et l'autre fois le plus grand commun diviseur cherché.

Les équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| y + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| = 0, \\ \left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{array} \right| x - \left| \begin{array}{cc} a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{array} \right| = 0, \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (44)$$

déterminent une solution commune aux équations (34), les autres solutions communes à ces équations doivent satisfaire à l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le plus grand commun diviseur des fonctions φ et ψ .

§ 14. Pour éclaircir la théorie précédente, il suffit de prendre un exemple d'équations à coefficients numériques. Soient les équations données:

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 + 5xy - 3x + 3y^2 - 7y - 20 = 0, \\ 2x^2 + xy + 9x - 3y^2 + y + 10 = 0, \end{array} \right\} \dots\dots\dots (34^*).$$

Ces équations sont dépendantes, car tous les déterminants de l'assemblant:

$$\left| \begin{array}{cccccc} & & & & & 2 \\ & & & & & 2 \\ 5 & 2 & & & & 1 & 2 \\ -3 & & 2 & 9 & & & 2 \\ 3 & 5 & & -3 & 1 & & \\ -7 & -3 & 5 & 1 & 9 & 1 & \\ -20 & & -3 & 10 & & & 9 \\ & 3 & & & -3 & & \\ & -7 & 3 & & 1 & -3 & \\ & -20 & -7 & 10 & 1 & & \\ & & -20 & & & 10 & \end{array} \right| \dots\dots\dots (40^*),$$

s'annulent. Les équations terminales :

$$\left. \begin{aligned} 4xy - 12x + 6y^2 - 8y - 30 &= 0, \\ 4x^2 + 6xy + 6x - 6y - 10 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42^*),$$

peuvent se décomposer en facteurs, comme suit :

$$\left. \begin{aligned} 2(y - 3)(2x + 3y + 5) &= 0, \\ 2(x - 1)(2x + 3y + 5) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43^*),$$

d'où l'on trouve $2x + 3y + 5$ pour le plus grand commun diviseur des premiers membres des équations données (34^{*}).

Il est clair que les facteurs obtenus par la méthode d'élimination employée, appartiennent au même domaine de rationalité où se rapportent les coefficients des fonctions qui forment les premiers membres des équations données ¹⁾.

§ 15. S'il arrive que tous les déterminants de l'assemblant (41) s'annulent, les équations (34) sont liées par la relation linéaire :

$$b_1 \varphi - a_1 \psi = 0 \dots\dots\dots (45),$$

et toutes les solutions de l'une des équations (34) satisfont alors à l'autre.

III. Formes quaternaires.

§ 16. La voie à suivre dans ce cas ne s'écarte pas de celle que nous avons suivie dans les paragraphes précédents.

Le cas où l'on a deux équations non-homogènes à trois variables se traite de la même manière que le cas de deux équations non-homogènes à deux variables. La considération de ce cas mettra en évidence que deux équations ne sont dépendantes que, si leurs premiers membres ont un commun facteur.

Les cas où l'on a trois ou quatre équations non-homogènes à trois variables nous mènent à des considérations plus compliquées.

Après ce qui précède, il suffira de donner des exemples d'équations linéaires.

¹⁾ Comparer: Kronecker, Festschrift (Journal de Crelle, tome 92) et J. Molk, Acta Mathematica, tome 6.

1. Quatre équations:

$$\left. \begin{aligned} \psi &\equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0, \\ \psi &\equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 = 0, \\ \chi &\equiv c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 = 0, \\ \omega &\equiv d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46).$$

Ces équations sont dépendantes, si l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (47),$$

et elles sont liées par la relation:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \psi - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \psi + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \chi - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \omega = 0 \dots (48),$$

si la relation (47) est vérifiée.

2. Trois équations:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0, \\ \psi &\equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 = 0, \\ \chi &\equiv c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49).$$

Pour la dépendance de ces équations il est nécessaire que tous les déterminants de l'assemblant:

$$\begin{vmatrix} & s_1 & s_2 & s_3 \\ x & a_1 & b_1 & c_1 \\ y & a_2 & b_2 & c_2 \\ z & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (50),$$

s'annulent, et ces équations sont dans ce cas liées par la relation:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Phi - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \psi + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \chi \equiv 0 \dots\dots\dots (51).$$

3. Deux équations :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0, \\ \psi &\equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52).$$

Ces équations sont dépendantes, si tous les déterminants de l'assemblant :

$$\begin{array}{c|cc} & s_1 & s_2 \\ \hline x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ z & a_3 & b_3 \\ 1 & a_4 & b_4 \end{array} \dots\dots\dots (53),$$

s'annulent, et elles sont liées en ce cas par la relation :

$$b_1 \Phi - a_1 \psi \equiv 0 \dots\dots\dots (54).$$

IV. La dépendance ou l'indépendance des fonctions algébriques.

§ 17. Dans ce qui précède, nous avons rencontré plusieurs fois des fonctions liées par des relations ne contenant pas les variables explicitement. Ces fonctions se nomment fonctions dépendantes ¹⁾.

Il n'est pas nécessaire que les équations obtenues en égalant à zéro quelques fonctions dépendantes, soient elles-mêmes dépendantes, p. e. les fonctions

$$\left. \begin{aligned} \psi &\equiv a_1 x + a_2, \\ \psi &\equiv b_1 x + b_2, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

¹⁾ Comparer: H. Laurent, Traité d'Analyse, tome I, chap. VII.

sont certainement dépendantes, car on a la relation :

$$-b_1\varphi + a_1\psi \equiv a_1b_2 - a_2b_1 \dots \dots \dots (56),$$

mais les équations :

$$\left. \begin{aligned} a_1x + a_2 &= 0, \\ b_1x + b_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (57)$$

sont seulement dépendantes, si leur résultant, c-à-d $a_1b_2 - a_2b_1$, s'annule.

Réciproquement, il peut arriver que quelques équations algébriques sont dépendantes, tandis que les fonctions qui forment leurs premiers membres sont indépendantes, p. e. les équations (28) se trouveraient dans ce cas, si tous les déterminants de l'assemblant (30) s'annulaient, tandis que la forme $2a_1b_2 - a_2b_1$ ne s'annule pas.

§ 18. Si le nombre des fonctions que l'on considère, est d'une unité supérieur à celui des variables qui y entrent, ces fonctions sont continuellement liées par une relation dans laquelle les variables ne figurent pas explicitement. On obtient cette relation en éliminant les variables entre les équations que l'on obtient en égalant ces fonctions à des symboles distincts, comme nous avons opéré dans les paragraphes 4 et 7.

§ 19. Pour le cas où le nombre des fonctions est égal à celui des variables qui y entrent, JACOBI a montré que le caractère distinctif qui fait reconnaître si ces fonctions sont dépendantes, consiste en ce que leur déterminant fonctionnel s'annule identiquement ¹⁾.

Nous ne nous arrêterons pas à donner la démonstration de ce théorème, laquelle est d'une notoriété très-grande. Il suffira de mentionner un exemple. Les fonctions :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\equiv a_1x^2 + a_2xy + a_3x + a_4y^2 + a_5y + a_6, \\ \psi &\equiv b_1x + b_2y + b_3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (58),$$

sont dépendantes, si leur déterminant fonctionnel :

$$\begin{vmatrix} 2a_1x + a_2y + a_3 & a_2x + 2a_4y + a_5 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (59),$$

¹⁾ Voir: Jacobi, De determinantibus functionalibus (Journal de Crelle, tome 22), traduit en allemand dans Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, n°. 78.

s'annule identiquement, et indépendantes, si ce n'est pas le cas.

Pour la dépendance des fonctions (58) il est donc nécessaire que les trois formes $2 a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_2 b_2 - 2 a_4 b_1$ et $a_3 b_2 - a_5 b_1$ s'annulent.

Si l'une de ces formes a une valeur différente de zéro, les fonctions (58) ne sont pas liées par une relation où les variables ne figurent pas explicitement.

§ 20. Si le nombre des fonctions que l'on considère, est inférieur à celui des variables qui y entrent, la condition nécessaire et suffisante, pour que ces équations soient liées par une relation ne contenant pas les variables explicitement, consiste en ce que tous les déterminants de l'assemblant fonctionnel de ces fonctions s'annulent identiquement, p. e. les fonctions :

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4, \\ \psi &\equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60),$$

sont dépendantes, si tous les déterminants de l'assemblant fonctionnel :

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right| \dots\dots\dots (61),$$

s'annulent, et indépendantes, si au moins l'un de ces déterminants a une valeur différente de zéro.

Appendices.

1. Les solutions d'un système de n équations non-homogènes à n variables appartenant au domaine de l'infini.

§ 21. Dans notre mémoire intitulé „Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à $n + 1$ variables” nous n'avons pas considéré spécialement le cas où l'un des éléments d'un système de racines obtient la valeur zéro.

Il n'y avait pas alors sujet de considérer ce cas en particulier, car les résultats généraux ne subissent pas de modification importante par la présence de telles solutions. Le degré de l'équation finale reste encore égal au produit des degrés des équations

données, mais quelques déterminants de l'assemblant des coefficients de ces équations s'annulent dans ce cas ¹⁾.

§ 22. Dans le cas où l'on considère un système de n équations non-homogènes à n variables, on rencontre parfois des solutions qui se rapportent au domaine de l'infini.

En éliminant dans ce cas les variables, à l'une quelconque près, on obtient une équation résultante dont le degré est inférieur au produit des degrés des équations données.

Les solutions que nous avons en vue, s'accordent avec celles du système de n équations homogènes à $n + 1$ variables obtenu du système des équations données en introduisant une nouvelle variable, et où la variable introduite obtient la valeur zéro.

§ 23. Pour qu'un système de n équations non-homogènes à n variables admette des solutions infinies, il faut que le résultant des n équations homogènes à n variables que l'on obtient en égalant à zéro l'ensemble de leurs termes du degré le plus élevé, s'annule.

Le plus grand nombre des solutions communes à ces équations est $g_2 g_3 \dots g_n$, si les équations données sont respectivement des degrés $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n$, où $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \dots \geq g_n$.

Comme l'équation finale de n équations non-homogènes à n variables est, dans le cas général, nécessairement du degré $g_1 g_2 g_3 \dots g_n$, si son degré s'abaisse, il faut que quelques-unes de ces racines soient infinies.

Le plus grand nombre des solutions d'un système de n équations non-homogènes à n variables appartenant au domaine de l'infini, est, comme nous avons vu, $g_2 g_3 \dots g_n$.

De là découle que le degré de l'équation finale ne peut s'abaisser qu'à $(g_1 - 1) g_2 g_3 \dots g_n$.

2. Les solutions d'un système de n équations non-homogènes à n variables ayant un élément commun.

§ 24. Il semble que le degré de l'équation finale s'abaisse aussi dans le cas où le système d'équations données admet des solutions ayant un élément commun.

L'équation finale par laquelle on évalue l'élément considéré doit avoir des racines égales dans ce cas.

Si l'on compose cette équation finale en prenant pour ses coefficients les déterminants désignés de l'assemblant des coefficients

¹⁾ Comparer: Les systèmes de racines, § 30.

des équations données, fixant le produit des degrés des équations données pour le degré de la fonction F , sans avoir divisé ces déterminants par leur plus grand commun diviseur, tous les coefficients de cette équation doivent s'annuler ¹⁾. L'équation terminale contenant dans un seul terme une deuxième variable, se réduit dans ce cas à une équation à une variable dont le degré est d'une unité inférieur au produit des degrés des équations données. Il semble donc que le degré de l'équation finale s'abaisse d'une unité.

Prenant dans la détermination de l'équation terminale considérée le degré de la fonction F d'une unité inférieur au produit des degrés des équations données, le coefficient du terme qui tombe de l'équation terminale considérée, est, comme on sait, commun facteur de tous les coefficients de l'équation finale ²⁾. C'est l'évanouissement de ce commun facteur qui entraîne que tous les coefficients de l'équation finale se détruisent dans ce cas.

En divisant les coefficients de l'équation finale par leur plus grand commun facteur, ils ne s'annulent plus. L'équation finale conserve son degré, mais elle admet au moins deux racines égales dans ce cas.

3. Combien de et quels déterminants d'un assemblant doivent s'annuler, pour que ce soit le cas avec tous les déterminants de cet assemblant.

§ 25. Dans ce qui précède, le cas se présente plusieurs fois que tous les déterminants d'un assemblant s'annulent. Reste à savoir combien de et quels déterminants d'un assemblant doivent s'annuler, pour que ce soit le cas avec tous les autres.

Considérons en premier lieu le cas où l'assemblant proposé contient q colonnes indépendantes et p lignes liées par $p - q$ relations linéaires indépendantes, où $p > q$.

En choisissant $q - 1$ lignes non liées entre elles par une relation linéaire et ne contenant pas une ligne composée de zéros seuls, ces lignes forment un déterminant avec chacune des autres lignes de l'assemblant considéré. On obtient ainsi $p - q + 1$ déterminants, liés par une relation linéaire.

Si ces déterminants s'annulent, les autres déterminants de l'assemblant considéré s'annulent également. Cela se voit facilement en

¹⁾ Comparer: Les systèmes de racines, § 26.

²⁾ Voir: Les systèmes de racines, § 3.

considérant les p équations linéaires homogènes à q variables qu'on peut former des lignes de l'assemblant proposé ¹⁾.

§ 26. Considérons en deuxième lieu le cas où les coefficients des $p-q$ relations linéaires existant entre les lignes de l'assemblant considéré forment les arguments consécutifs d'une forme binaire du degré $p-1$.

Si les variables de cette forme ne peuvent s'annuler, le nombre des déterminants qui doivent s'annuler, pour que ce soit le cas avec tous les autres, se réduit à $p-q$. Les $p-q+1$ déterminants que l'on obtient en supprimant alternativement $p-q$ lignes de $p-q+1$ lignes consécutives sont liés par la même relation linéaire. Si $p-q$ de ces déterminants s'annulent, le dernier s'annule également, et de même tous les autres déterminants de l'assemblant considéré.

Si l'on admet que l'une des variables de la forme binaire puisse obtenir la valeur zéro, les conclusions que l'on peut tirer dans le cas où les variables ne peuvent s'annuler, deviennent inexactes. Dans ce cas, la première ou la dernière ligne de l'assemblant considéré doit se composer de zéros seuls. Pour tirer la conclusion que tous les déterminants de l'assemblant s'annulent, il faut que ce soit le cas avec $p-q+1$ déterminants choisis de telle manière qu'aucun d'entre eux ne contienne la première ou la dernière ligne.

§ 27. Dans le cas où les lignes de l'assemblant considéré sont liées par $p-q$ relations linéaires dont les coefficients forment les arguments consécutifs d'une forme ternaire, on peut tirer des conclusions analogues à celles du paragraphe précédent.

Il est clair que ce cas ne se présente que, si p a une valeur de la forme $\binom{2}{2}$.

Si les variables de la forme ternaire ne peuvent s'annuler, l'évanouissement de $p-q$ déterminants désignés de l'assemblant suffit, pour que tous les autres s'annulent.

Si l'on admet que l'une des variables de la forme ternaire peut obtenir la valeur zéro, on conclut facilement que les lignes de l'assemblant qui s'accordent avec les termes de la forme ternaire ne contenant pas la variable considérée, sont liées entre elles par une relation linéaire. Les déterminants qui contiennent toutes ces lignes s'annulent identiquement.

Afin que dans ce cas tous les déterminants de l'assemblant s'annulent, il suffit que ce soit le cas avec $p-q+1$ d'entre eux, ne

¹⁾ Voir: Théorie générale de l'élimination, § 4—7.

contenant pas toutes les lignes qui s'accordent avec les termes de la forme ternaire, se composant exclusivement de deux variables.

4. Les relations qui doivent exister entre les coefficients de $n + 1$ équations homogènes à n variables, pour que ces équations admettent une solution commune.

§ 28. Il nous paraît que la dépendance d'équations homogènes dans la cas où leur nombre est supérieur à celui des variables qui y entrent (voir § 2), exige l'existence d'une solution commune à toutes ces équations.

Cette assertion n'est pas une conséquence directe de la définition de dépendance donnée par JACOBI, mais elle découle nécessairement des recherches faites dans le mémoire présent.

Pour que $n + 1$ équations homogènes à n variables admettent une solution commune, il ne suffit pas que les $n + 1$ systèmes de de n équations homogènes à n variables, obtenus par la suppression successive de l'une de ces équations, aient des résultants qui s'annulent, mais il faut qu'ils admettent le même système de racines.

On obtient les relations qui doivent exister entre les coefficients de $n + 1$ équations homogènes à n variables, pour que ces équations admettent une solution commune, en considérant ce système d'équations comme un système de $n + 1$ équations homogènes à $n + 1$ variables dont l'une des variables a obtenu la valeur zéro. Dans ce cas il existe, comme nous avons vu, une relation linéaire entre les lignes de l'assemblant de la fonction F appartenant au système de $n + 1$ équations considérées, qui s'accordent avec les termes de la fonction F ne contenant pas la variable introduite, laquelle doit s'annuler.

Tous les déterminants de l'assemblant formé par ces lignes doivent donc s'annuler. Les équations qui expriment l'évanouissement de ces déterminants, forment alors les conditions qui doivent être remplies, pour que les équations données admettent une solution commune.

Si les équations données sont respectivement des degrés $g_1, g_2, g_3, \dots, g_{n+1}$ où $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq \dots \geq g_{n+1}$, il suffit de prendre $g_1 + g_2 + \dots + g_n - (n - 1)$ pour le degré de la fonction F dans la formation de cet assemblant.

Voici un exemple.

Les équations :

$$\left. \begin{aligned} a_4 y^2 + a_5 yz + a_6 z^2 &= 0, \\ b_4 y^2 + b_5 yz + b_6 z^2 &= 0, \\ c_2 y + c_3 z &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

admettent une solution commune, si tous les déterminants de l'assemblant :

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_4 & b_4 & c_2 & & & \\ a_5 & a_4 & b_5 & b_4 & c_3 & c_2 \\ a_6 & a_5 & b_6 & b_5 & c_3 & c_2 \\ & a_6 & b_6 & & c_3 & \end{array} \right| \dots\dots\dots (63)$$

s'annulent. Cet assemblant se forme des quatre dernières lignes de l'assemblant (17).

L'évanouissement de tous les déterminants de cet assemblant entraîne non seulement la dépendance des équations (62), prises deux à deux, mais aussi l'existence d'une solution commune à toutes ces équations, ce qui se démontre facilement.

§ 29. Pour conclure, nous donnons encore deux exemples de $n + 1$ équations homogènes à n variables dont l'évanouissement des $n + 1$ résultants de ces équations, prises n à n , n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une solution commune à toutes ces équations.

1. Pour que les trois équations :

$$\left. \begin{aligned} a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 &= 0, \\ b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 &= 0, \\ c_1 x^2 + c_2 xy + c_3 y^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

admettent une solution commune, il faut et il suffit que tous les déterminants de l'assemblant :

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & c_2 & c_1 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & c_3 & c_2 \\ & a_3 & b_3 & & c_3 & \end{array} \right| \dots\dots\dots (65)$$

s'annulent.

ERRATA

du mémoire „Les systèmes de racines d'un système
de n équations homogènes à $n + 1$ variables.

Page 20, ligne 12, *au lieu de* ces, *lisez*: ses.

„ 28, „ 7, *au lieu des mots* si deux de ces déterminants,
lisez: si deux déterminants désignés de cet assemblant.

Page 28, ligne 12, *au lieu des mots* si trois de ces déterminants,
lisez: si trois déterminants désignés de cet assemblant.

Page 31, ligne 10, *au lieu de* la, *lisez*: le.

„ 47, „ 5 d'en bas, *au lieu de* $\mu < \nu + \mu$, *lisez*:
 $\mu < \nu + \tilde{\omega}$.

Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von den ebenen Curven

VON

H. DE VRIES.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel VIII. N^o 7.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1904.

INHALTSVERZEICHNIS.

ERSTER THEIL.

§ 1.	Einleitung. Die cyklographische Fläche	S. 5—6
§ 2.	Andere Auffassung dieser Fläche.	„ 6—7
§ 3.	Ordnung der Fläche. Querschnitt mit B und B_∞	„ 7—9
§ 4.	Klasse, Ordnung der Rückkehrkante, Anzahl der stationären Schmiegungebenen und Erzeugenden. Die Zahlen $\beta, y + d, x + d, g + \Delta, h + D, p$	„ 9—13
§ 5.	Die Zahlen d, D, Δ	„ 13—14
§ 6.	Die Zahlen γ, t, R . Tabelle aller charakteristischen Zahlen.	„ 15—17
§ 7.	Die Rückkehrkante der Fläche und die Evolute der ebenen Curve. Die Scheitel dieser Curve. Anzahl der Krümmungskreise welche die Curve überdies noch anderswo berühren.	„ 17—23
§ 8.	Die Restdoppelcurve der Fläche und das System der die Curve doppelt berührenden Kreise. Die Brennpunkte der Curve. Anzahl der doppelt berührenden Kreise deren einer Berührungspunkt vorgeschrieben ist	„ 23—26
§ 9.	Die unendlich fernen Punkte der Restdoppelcurve	„ 26—28
§ 10.	Klasse des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise. Anzahl der Rückkehrpunkte und Doppelpunkte.	„ 28—32
§ 11.	Die dreifachen Punkte der Restdoppelcurve und die Anzahl der die gegebene Curve in drei verschiedenen Punkten berührenden Kreise. Anzahl der Punkte welche Mittelpunkte sind von 2 verschiedenen doppelt berührenden Kreisen	„ 32—37

ZWEITER TEIL.

- § 12. Das System der Kreise welche die Curve berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen. Punktindex des Systems der Krümmungs- und der doppelt berührenden Kreise. Spezielle Fälle. Anzahl der Kreise welche die Curve berühren und durch zwei vorgeschriebene Punkte gehen S. 38—42
- § 13. Das System der Kreise welche die Curve und überdies eine gegebene Gerade berühren. Tangentialindex des Systems der Krümmungs- und der doppelt berührenden Kreise. Die Parallelcurven der gegebenen. Kreise welche die Curve und zwei Geraden berühren, oder die Curve und eine Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen. „ 42—46
- § 14. Das System der Kreise welche die Curve und einen gegebenen Kreis gleichzeitig berühren. Anzahl der Krümmungs- und doppelt berührenden Kreise dieses Systems. Speziell wenn der gegebene Kreis selbst Krümmungs- oder doppelt berührender Kreis ist. Die beiden Indices des Systems. Anzahl der Kreise welche die Curve und zwei Kreise berühren „ 46—48
- § 15. System der Kreise welche zwei Curven zugleich berühren. Anzahl der Krümmungskreise der einen Curve welche die andere berühren. Anzahl der Kreise welche die eine Curve doppelt, die andere einfach berühren. Klasse des Ortes der Mittelpunkte des Systems. Anzahl der Punkte welche Mittelpunkte sind von zwei verschiedenen, die beiden Curven je einmal berührenden Kreisen. Die beiden Indices des Systems. . . „ 48—56
- § 16. Das Apollonische Problem für 3 beliebige Curven. „ 56—57
-

Anwendung der Cyklographie auf die Lehre von den ebenen Curven.

VON

H. DE VRIES.

ERSTER THEIL.

Die cyklographische Fläche.

§ 1. Es sei gegeben eine ebene Curve C , von der Ordnung μ , der Klasse ν , mit δ Doppelpunkten, α Rückkehrpunkten, τ Doppeltangenten, ι Wendetangenten, welche überdies ε -mal durch jeden der beiden absoluten Kreispunkte I_1, I_2 im Unendlichen hindurchgeht, und σ mal die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene berührt. Legt man durch einen beliebigen Punkt P dieser Curve die Normalebene (senkrecht zur Tangente t), und zieht in derselben die beiden Geraden e, e^* durch P und unter 45° gegen die Ebene der Curve, so bilden die cyklographischen Bildkreise ¹⁾ sämtlicher Punkte dieser beiden Geraden das System der die Curve in P berührenden Kreise. Lässt man den Punkt P die ganze Curve durchlaufen, so erzeugen die Geraden e, e^* eine zur Ebene der Curve orthogonalsymmetrische developpable Fläche, developpabel, weil zwei unmittelbar auf einander folgende Kreisbüschel ein Exemplar, nämlich den Krümmungskreis an der betreffenden Stelle der Curve, gemein haben, und also je zwei unmittelbar auf einander folgende Erzeugenden e , (sowie orthogonalsymmetrisch auch die beiden e^*) sich schneiden. Sämtliche Punkte dieser so entstehenden

¹⁾ WILH. FIEDLER: „Cyklographie.“ Seite 15.

„cyklographischen Fläche“ der Curve haben die Eigenschaft dass ihre Bildkreise die Curve berühren; den besonderen Punkten der Fläche, wie etwa denen der Rückkehr- und Doppelcurve, entsprechen besondere Kreise der Ebene, nämlich die Krümmungs- und doppelt berührenden Kreise, und überhaupt wird man, einmal im Besitz der cyklographischen Fläche, im Stande sein die Antwort zu geben auf alle Fragen welche gestellt werden können in Bezug auf die Kreise welche die Curve unter vorgeschriebenen Bedingungen berühren. Man kann aber weitergehen und zwei oder drei Curven mit ihren zugehörigen Flächen zugleich betrachten; dann gibt das Studium der diesen Flächen gemeinsamen Punkte Aufschluss über die Kreise welche die Curven zugleich berühren, und eventuell noch anderen gegebenen Bedingungen genügen.

Die Beantwortung der hier angeregten Fragen in der angegebenen Weise bildet den Zweck der vorliegenden Abhandlung. Freilich müssen diese Probleme, wie sich das wohl von selbst versteht, auch auf andere Weise erledigt werden können; die Tatsache aber dass bei den hier folgenden stereometrischen Betrachtungen sämtliche Resultate aus einer einzigen Quelle fliessen, und sozusagen von der cyklographischen Fläche unmittelbar abgelesen werden können, sichert denselben vielleicht, wie der Verfasser zu hoffen wagt, ihre Existenzberechtigung.

§ 2. Wir geben von der cyklographischen Fläche eine etwas andere Auffassung, welche das Studium derselben wesentlich erleichtert. Es schliessen ja sämtliche Erzeugenden der Fläche mit der Ebene der Curve, die wir als Bildebene B bezeichnen wollen, Winkel von 45° ein; folglich ist der Richtungskegel der Fläche ein gerader Kreiskegel mit verticaler Axe (B horizontal gedacht), und einem Winkel von 90° an der Spitze; dieser Rotationskegel schneidet die Ebene E_∞ in einem gewissen, den imaginären Kugelkreis in den beiden absoluten Punkten I_1, I_2 von B berührenden, Kegelschnitte K_∞ , und es müssen also sämtliche Erzeugenden der Fläche die gegebene Curve und den Kegelschnitt K_∞ schneiden. Aber je zwei auf einander folgende Erzeugenden liegen in einer Ebene, welche also sowohl die Curve C wie K_∞ berührt; die cyklographische Fläche ist also einfach die durch diese beiden Curven als Leitcurven bestimmte Developpable.

Es ist diese developpable Fläche, und eine solche der nämlichen Art, wo nämlich unser reeller Kegelschnitt K_∞ durch den imaginären Kugelkreis selbst ersetzt worden ist, und also die ganze Fläche imaginär wird bis auf ihre Doppelcurve, bereits un-

tersucht worden von Herrn W. A. VERSLUYS ¹⁾, nur hat sich der Verfasser dort auf den Fall beschränkt wo die gegebene Curve keine spezielle Lage einnimmt, und also die im § 1 genannten Zahlen ε und σ beide gleich null sind; diese Zahlen beeinflussen aber unsere sämtlichen Resultate in sehr hohem Grade, wir sind also genötigt in aller Kürze die charakteristischen Zahlen unserer Fläche unter Berücksichtigung der Zahlen ε und σ herzuleiten.

§ 3. Nehmen wir für einen Augenblick an es seien ε und σ gleich null, so ist sofort einzusehen dass die Curve C eine Doppelcurve, K_∞ aber eine ν -fache Curve der Fläche ist. Denn irgend eine Tangente von C schneidet g_∞ in einem Punkte P , aus welchem an K_∞ zwei Tangenten gehen; die Verbindungslinien der Berührungspunkte derselben mit demjenigen der zuerst genannten sind Erzeugenden der Fläche, und es gehen deren somit durch jeden Punkt von C zwei. Ist aber P der Schnittpunkt von g_∞ mit einer Tangente von K_∞ , so gehen durch denselben an C ν Tangenten, und es ist also jeder Punkt von K_∞ der Schnittpunkt von ν Erzeugenden. Hieraus ergibt sich dann weiter dass die Ordnungszahl der Fläche, also die Rangzahl r ihrer Rückkehrkante, gleich $2\mu + 2\nu$ ist; denn der vollständige Querschnitt mit der Ebene B besteht aus der Doppelcurve C und den zweimal ν Tangenten welche aus den Schnittpunkten von K_∞ mit B , also in unserm Falle aus den beiden Kreispunkten I_1, I_2 , an dieselbe gehen, jede dieser Tangenten nur einmal gezählt, weil die Schmiegungebenen durch dieselben entweder die Tangente in I_1 , oder in I_2 an K_∞ enthalten, und also in keinem Falle mit B zusammenfallen.

Oder, indem man die Ebene E_∞ zu Hülfe nimmt, der Querschnitt der Fläche mit dieser setzt sich zusammen aus der ν -fachen Curve K_∞ , und den μ mal zwei Tangenten welche aus den Schnittpunkten von g_∞ mit C an jenen Kegelschnitt gelegt werden können, jede derselben, aus dem nämlichen Grunde wie oben, einmal gezählt.

Wenn aber die Curve C die Gerade g_∞ in einem Punkte R berührt, so trennt sich die Ebene E_∞ , doppelt gelegt, von der Fläche ab; denn unter den Tangenten aus jedem Punkte P von g_∞ an C findet sich immer die Gerade g_∞ selbst, und es tritt also jeder Strahl des Strahlenbüschels in E_∞ und am Scheitel R zweimal als Erzeugende der Fläche auf, nämlich für die beiden Lagen

¹⁾ „Focales des courbes planes et gauches“, Verh. Kon. Akad. Tome VIII, N°. 5.

von P auf den Tangenten in den beiden Schnittpunkten des betreffenden Strahles mit K_∞ .

Wenn also die Curve C die Gerade g_∞ σ mal berührt, so wird die Zahl r um 2σ Einheiten kleiner.

Es soll die Curve durch I_1 hindurchgehen. Legen wir dann in diesem Punkte die Tangenten an C und K_∞ , so wird die Verbindungslinie der Berührungspunkte derselben innerhalb der durch die beiden Tangenten bestimmten Ebene völlig unbestimmt, weil man eben den Punkt I_1 mit sich selbst verbinden muss, und es trennt sich also diese Ebene von der Fläche ab; und wenn man beobachtet dass sich die Zahl der von I_1 an C gehenden Tangenten um zwei verringert hat, und also der Schnittpunkt irgend einer in B liegenden Gerade mit der Tangente in I_1 selbst für zwei in Wegfall kommende Punkte zählt, so erkennt man dass die sich abtrennende Ebene doppelt in Rechnung zu bringen ist. Geht also unsere Curve ε mal durch jeden der beiden Kreispunkte hindurch, so wird dadurch die Ordnungszahl der Fläche um 4ε Einheiten verringert. Wir finden deshalb:

$$r = 2\mu + 2\nu - 4\varepsilon - 2\sigma.$$

Wir prüfen dieses Resultat an den beiden einfachen Beispielen des Kreises und der Parabel. Für den Kreis ($\mu = \nu = 2$, $\varepsilon = 1$, $\sigma = 0$) finden wir $r = 4$, was offenbar richtig ist, weil in diesem Falle die Fläche aus zwei zur Ebene B orthogonalsymmetrischen Rotationskegeln besteht; und für die Parabel ($\mu = \nu = 2$, $\varepsilon = 0$, $\sigma = 1$) finden wir $r = 6$, was ebenfalls mit den Tatsachen im Einklange ist. ¹⁾

Für die nach Wegfall der sich abtrennenden Ebenen übrig bleibende „eigentliche“ cyklographische Fläche ist die Curve C immer noch eine Doppelcurve, und der vollständige Querschnitt mit B setzt sich zusammen aus dieser Doppelcurve und den zweimal $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten welche aus den Punkten I_1 , I_2 noch an sie gehen; K_∞ hingegen ist eine $(\nu - \sigma)$ -fache Curve, denn aus dem Schnittpunkte irgend einer Tangente von K_∞ mit g_∞ gehen an C ausser g_∞ noch $\nu - \sigma$ Tangenten, durch den Berührungspunkt auf K_∞ gehen also $\nu - \sigma$ Erzeugenden, und der Querschnitt der Fläche mit E_∞ besteht aus diesem $(\nu - \sigma)$ -fachen Kegelschnitt, den zweimal $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Tangenten an denselben aus

¹⁾ Man vergleiche z. B. FIEDLER „Darstellende Geometrie“, II, Seite 379, N°. 2. (3^o Auflage).

den einfachen *Schnittpunkten* von g_∞ mit C , und den 4σ je zwei und zwei unendlich benachbarten Tangenten aus den σ *Berührungspunkten* von g_∞ mit C . Aus diesem letzten Resultate ergiebt sich zugleich dass E_∞ für jede der 2σ Tangenten an K_∞ aus diesen σ Berührungspunkten Schmiegungebene ist, und dass sich in jedem dieser Berührungspunkte zweimal zwei nicht benachbarte Erzeugenden der Fläche schneiden, sodass die Restdoppelcurve dieser letzteren einfach durch dieselben hindurchgeht; und schliesslich bemerken wir noch dass die Punkte I_1, I_2 , trotzdem sie nicht bloss auf K_∞ liegen sondern zugleich ε -fache Punkte von C sind, dennoch, wie alle andern Punkte von K_∞ , $(\nu - \sigma)$ -fache Punkte der Fläche sind. Denn irgend eine Gerade durch I_1 in B hat mit der Fläche ausser I_1 $\mu - \varepsilon$ auf C gelegene, und also doppelt zählende, und $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ auf den Tangenten aus I_2 an C liegende, und also einfach zählende, Punkte gemein, das heisst im ganzen $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$; die Differenz aber dieser letzteren Zahl und $r = 2\mu + 2\nu - 4\varepsilon - 2\sigma$ ist $\nu - \sigma$. Es müssen also auch durch I_1 und I_2 , wie durch jeden andern Punkt von K_∞ , $\nu - \sigma$ Erzeugenden gehen, und diese sind in der That leicht aufzufinden. Erstens haben wir die $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten aus I_1 an C , deren Berührungspunkte ausserhalb g_∞ liegen; sodann aber ist folgendes zu bemerken. Nehmen wir auf g_∞ einen Punkt P ganz in der Nähe von I_1 an, und betrachten von den ε durch I_1 gehenden Zweigen von C nur einen, so gehen aus P an diesen und an K_∞ je 2 Tangenten, deren Berührungspunkte, verbunden, 4 nahe zusammenliegende Erzeugender der Fläche liefern. Nähert sich P dem Punkte I_1 immer mehr um schliesslich mit ihm zusammenzufallen, so nähern sich die 4 Erzeugenden zwei in der durch die Tangenten an K_∞ und den Curvenzweig bestimmten Ebene liegenden, durch I_1 hindurchgehenden Grenzlagen, und weil C ε mal durch I_1 hindurchgeht, so erhalten wir im ganzen 2ε solcher Erzeugenden, welche mit den $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ in B liegenden vereinigt in der That die Zahl $\nu - \sigma$ wieder hervorbringen. Zugleich ist ersichtlich dass die genannten Ebenen Schmiegungebenen, und zwar in Folge der Symmetrie Doppelschmiegungebenen sind.

§ 4. Zur Bestimmung der Klassenzahl der Fläche betrachten wir entweder einen beliebigen Punkt in B oder in E_∞ . Im ersteren Falle gehen durch denselben ν Tangenten an C und also 2ν Berührungsebenen der Fläche; im letzteren gehen durch den Punkt 2 Tangenten an K_∞ , durch deren jede $\nu - \sigma$ Schmiegungebenen gehen; E_∞ selbst aber ist (§ 3) eine 2σ -fache Schmiegungeebene,

also finden wir in beiden Fällen, wenn wir die Klassenzahl, wie üblich, mit n bezeichnen,

$$n = 2 \nu.$$

Weitere Grössen, welche einer directen Bestimmung leicht zugänglich sind, sind die Ordnung m der Rückkehrkante, die Anzahl α ihrer stationären Schmiegungebenen, und die Anzahl θ ihrer stationären Erzeugenden.

Die Zahl m wird bestimmt indem wir die Schnittpunkte der Rückkehrkante mit einer der beiden Ebenen B oder B_∞ aufsuchen. Die Bildkreise der Punkte dieser Curve sind die Krümmungskreise der Curve C , ein Schnittpunkt mit B bedingt also einen Krümmungskreis vom Radius null, und diesen findet man nur in einer Spitze. Die Rückkehrkante geht also durch die α Spitzen von C , und aus der Entstehungsweise der Fläche ist ohne weiteres klar, dass diese Punkte für die Rückkehrkante Doppelpunkte sind, während die Tangenten in denselben in der Ebene durch die Spitze senkrecht zur Spitzentangente liegen und unter 45° gegen B geneigt sind.

Es hat aber die Rückkehrcurve noch andere Punkte mit B gemein. Wir sahen oben bereits dass sich aus jedem der beiden Punkte I_1, I_2 $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ nicht auf g_∞ berührende Tangenten an C legen lassen, deren jede der cyklographischen Fläche angehört. Die beiden einer solchen Tangente unendlich benachbarten Erzeugenden der Fläche schneiden sich in Folge der Symmetrie im Berührungspunkte, sodass dieser letztere als Schnittpunkt dreier unendlich naher Erzeugenden erscheint; d. h. jeder solche Berührungspunkt ist eine Spitze der Rückkehrcurve, und die Tangente derselben liegt in B und geht durch I_1 oder I_2 . Auf diese Weise entstehen also $6(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ neue Schnittpunkte; fügen wir die α Doppelpunkte hinzu so finden wir:

$$m = 2\alpha + 6(\nu - 2\varepsilon - \sigma).$$

Es ist aber, wenn wir bedenken dass wir unter δ nur die wirklichen Doppelpunkte von C verstehen, und also die beiden ε -fachen Punkte I_1, I_2 für sich betrachten müssen:

$$\begin{aligned} i &= 3\mu(\mu - 2) - 6\delta - 6\varepsilon(\varepsilon - 1) - 8\alpha \\ 3\nu &= 3\mu(\mu - 1) - 6\delta - 6\varepsilon(\varepsilon - 1) - 9\alpha, \text{ und folglich:} \\ i - 3\nu &= -3\mu + \alpha, & \text{oder} \\ \alpha &= i + 3(\mu - \nu); \end{aligned}$$

substituieren wir diesen Wert von α in die obige Formel, so finden wir

$$m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma).$$

Die Schnittpunkte der Rückkehrkante mit E_∞ sind dreierlei Natur; zieht man erstens aus dem Schnittpunkt einer Wendetangente von C mit g_∞ die beiden Tangenten an K_∞ , so erkennt man leicht dass deren Berührungspunkte einfache Punkte der Rückkehrkante sind; die Anzahl derselben ist also 2ι . Legt man zweitens die beiden Tangenten an K_∞ aus einem der $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkte von g_∞ mit C , so sind dieselben Erzeugenden der Fläche, und es lehrt die Anschauung dass sich auch hier wieder die unmittelbar vorhergehende und folgende Erzeugende im Berührungspunkte der betreffenden Tangente begegnen; diese Berührungspunkte sind also wiederum Spitzen mit in E_∞ gelegener Tangente, d. h. auf diese Weise erhalten wir $6(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ neue Schnittpunkte mit E_∞ .

Drittens endlich ist E_∞ selbst eine 2σ -fache Schmiegungebene in den Berührungspunkten der Tangenten an K_∞ aus den Berührungspunkten von C mit g_∞ ; wir erhalten also noch weitere 6σ Schnittpunkte hinzu, und finden in Übereinstimmung mit dem Vorigen

$$m = 2\iota + 6(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma) + 6\sigma = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma).$$

Betrachten wir noch einmal die soeben gefundenen 2ι einfachen Schnittpunkte der Rückkehrkante mit E_∞ . Diese Punkte entstanden aus den Wendetangenten der C , ihre Schmiegungebenen enthalten also drei auf einander folgende Erzeugenden der Fläche und sind somit stationär; umgekehrt muss jede stationäre Schmiegungebene die Ebene B schneiden in einer Wendetangente von C ; es ist also

$$\alpha = 2\iota.$$

Endlich ergibt sich die Zahl θ der stationären Erzeugenden der Fläche gleich null. Denn eine stationäre Erzeugende bedingt in jedem ebenen Querschnitt der Fläche eine Spitze; nun hat allerdings die C Spitzen, allein diesen entsprechen, wie wir gesehen haben, Doppelpunkte der Rückkehrkante; es ist also in der That

$$\theta = 0.$$

Die bis jetzt bestimmten Zahlen r , n , m , α , θ , sind mit einander verbunden durch die Beziehung

$$\alpha - m - \theta = 3 (n - r)^1);$$

durch Substitution der oben gefundenen Werte wird dieselbe befriedigt. Zugleich aber sind wir jetzt in den Stand gesetzt zur Berechnung der übrigen charakteristischen Zahlen die CAYLEY-PLÜCKER'schen Formeln anzuwenden, ²⁾ mit deren Hülfe die nachstehenden Resultate erhalten werden. Man hat in der SALMON-FIEDLER'schen Bezeichnung ³⁾ die Formel

$$n + \theta - \beta = 3 (r - m);$$

setzt man hier die bereits bestimmten Werte ein, so erhält man für die Zahl der Spitzen der Rückkehrcurve:

$$\beta = 12 \mu - 4 \nu + 6 \iota - 24 \varepsilon - 12 \sigma.$$

Wir benutzen ferner die Formel:

$$m = r (r - 1) - 2 (y + d) - 3 (n + \theta),$$

wo y die Klassenzahl der der Rückkehrkante doppelt umschriebenen Developpabeln, d die Anzahl der Doppeltangenten dieser Curve bedeutet. Durch Einsetzung der Werte findet man:

$$y + d = 2 (\mu + \nu - 2 \varepsilon - \sigma)^2 - 4 (\mu + \nu) + 8 \varepsilon + 4 \sigma - \iota.$$

Weiter nehmen wir:

$$n = r (r - 1) - 2 (x + d) - 3 (m + \theta),$$

wo x die Ordnung der vollständigen Doppelcurve der cyklographischen Fläche angibt; wir finden:

$$x + d = 2 (\mu + \nu - 2 \varepsilon - \sigma)^2 - 10 \mu - 2 \nu - 3 \iota + 20 \varepsilon + 10 \sigma.$$

¹⁾ SALMON-FIEDLER „Anal. Geom. d. Raumes“, 3e Aufl. 2er Teil. S. 108.

²⁾ SALMON-FIEDLER. I. c.

³⁾ Vergleiche für dieselbe SALMON-FIEDLER I. c. S. 105 ff. und die tabellarische Uebersicht in PASCAL's „Repertorium“, II. S. 228.

Betrachten wir ferner die Formel:

$$r = n(n - 1) - 2(g + \Delta) - 3\alpha,$$

wo g die Anzahl der Geraden in einer Ebene angibt durch welche zwei nicht benachbarte Schmiegungeebenen hindurchgehen, und Δ die Zahl der doppelten Schmiegungeebenen bedeutet. Für die Summe dieser beiden Grössen finden wir:

$$g + \Delta = 2\nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota + 2\varepsilon + \sigma.$$

Endlich bedienen wir uns der Formel:

$$r = m(m - 1) - 2(h + D) - 3\beta,$$

wo h die Zahl der scheinbaren, D diejenige der wirklichen Doppelpunkte der Rückkehrcurve bezeichnet. Wir finden:

$$h + D = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)^2 - 22\mu + 5\nu - 10\iota \\ + 44\varepsilon + 22\sigma.$$

Und zur Bestimmung des Geschlechtes p können wir uns der Formel:

$$p = \frac{(m - 1)(m - 2)}{1 \cdot 2} - (h + D) - \beta,$$

oder einer damit gleichwertigen bedienen, und finden leicht:

$$p = \mu - \nu + \iota - 2\varepsilon - \sigma + 1.$$

§ 5. Es sind im letzten § die Summen $x + d$, $y + d$, $g + \Delta$ und $h + D$ ausgerechnet worden; wollen wir also die in denselben auftretenden Grössen einzeln kennen lernen, so muss jetzt nachträglich noch eine directe Bestimmung von d , Δ , D gegeben werden. Was nun zunächst die Zahl d der Doppelerzeugenden der Fläche anbetrifft, so ist schon aus cyklographischen Gründen klar dass dieselbe gleich null sein muss.

Denn die Bildkreise der beiden Berührungspunkte einer solchen Doppellinie mit der Rückkehrkante wären zwei Krümmungskreise der Curve C im nämlichen Punkte und an der nämlichen Tangente, was offenbar nur möglich ist wenn zwei Doppelpunkte von C zusammenrücken in einen Berührungsknoten, d. h. wenn zwei Cur-

venäste sich berühren, was gegen die Voraussetzung geht. Es wäre allerdings denkbar dass sich unter den besonderen Erzeugenden der Fläche, wie etwa denjenigen durch die cyklischen Punkte u. s. w. solche befinden würden die zweimal in Rechnung zu bringen wären; allein in den vorhergehenden §§ haben wir ja dieselben alle untersucht, ohne dass sich die Erscheinung um die es sich hier handelt gezeigt hätte.

Was die Zahl D der wirklichen Doppelpunkte anbetrifft, so fanden wir bereits (§ 4) dass jede Spitze von C ein Doppelpunkt der Rückkehrkante ist, während umgekehrt einleuchtet dass ein Doppelpunkt der letzteren in B einen Punkt vom Krümmungsradius null in C bedingt. Liegt ein Doppelpunkt ausserhalb B , so muss sein Bildkreis die Curve C an zwei verschiedenen Stellen osculieren, was aber im allgemeinen nicht möglich ist. Denn das System der Krümmungskreise bildet eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit; es wird also im allgemeinen eine endliche Anzahl solcher Kreise geben, welche die Curve noch anderwärtig berühren, aber keinen der sie zweimal osculiert. Es ist also:

$$D = \kappa = \iota + 3(\mu - \nu). \quad (§ 4).$$

Insbesondere mag hervorgehoben werden dass die Rückkehrkante nicht durch die Punkte I_1, I_2 hindurchgeht.

Endlich die Zahl Δ der Doppelschmiegungebenen. Jede Doppeltangente von C gibt zu zwei solchen Ebenen Veranlassung, welche symmetrisch in Bezug auf B liegen, und weil wir die Anzahl der Doppeltangenten, g_∞ nicht mitgerechnet, gleich 2τ vorausgesetzt haben, so ist die Anzahl der Ebenen 2τ . Überdies ist K_∞ (§ 3) eine 2σ -fache Schmiegungeebene, oder also die Vereinigung von $\sigma(2\sigma - 1)$ Doppelschmiegungebenen, und endlich haben wir noch die 2ε Ebenen zu berücksichtigen durch die Tangenten in I_1 und I_2 an K_∞ und C (§ 3, am Schluss); es ist also:

$$\Delta = 2\tau + \sigma(2\sigma - 1) + 2\varepsilon$$

oder, wenn wir den Wert von τ aus der PLÜCKER'schen Formel:

$$\mu = \nu(\nu - 1) - 2\tau - \sigma(\sigma - 1) - 3\iota$$

einsetzen:

$$\Delta = \nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota + 2\varepsilon + \sigma^2.$$

§ 6. Aus den in den vorhergehenden Nummern verwendeten Formeln ergeben sich drei Singularitäten nicht, deren Kenntniss dennoch für uns von Wichtigkeit ist; es ist dies erstens die Zahl derjenigen Erzeugenden der cyklographischen Fläche welche die Rückkehrkante, wie natürlich, an einer Stelle berühren, und überdies noch anderswo schneiden. Es ist klar dass die Bildkreise dieser Schnittpunkte die Curve C osculieren und zugleich an einer andern Stelle berühren. Für die Zahl γ dieser Punkte haben wir die Formel:

$$\gamma = r m + 12 r - 14 m - 6 n - 8 \theta - 4 d - 4 D^1);$$

durch Einsetzung der Werte rechts findet man:

$$\gamma = 4 \{ (\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma + 6) - 8\iota - 24\mu + 42\varepsilon + 21\sigma \}.$$

Für einen beliebigen Kegelschnitt ($\mu = \nu = 2, \iota = \varepsilon = \sigma = 0$), und für die Parabel ($\mu = \nu = 2, \iota = \varepsilon = 0, \sigma = 1$) findet man $\gamma = 0$, was offenbar richtig ist, weil ein Kreis einen Kegelschnitt nicht dreipunktig und überdies noch zweipunktig berühren kann; für den Kreis aber ($\mu = \nu = 2, \varepsilon = 1, \iota = \sigma = 0$) findet man $\gamma = 24$, was natürlich falsch ist; allein wenn man die Formel nicht in obiger Gestalt, sondern in der von PASCAL gegebenen schreibt ¹⁾, so tritt die Grösse β darin auf, also die Zahl der Spitzen der Rückkehrkante, und diese ergibt sich beim Kreise gleich -8 ; es ist also die Formel auf den Kreis überhaupt nicht anwendbar.

Zweitens haben wir zu betrachten die Zahl t der dreifachen Punkte der Doppelcurve, also die Anzahl der Punkte deren Bildkreise die Curve C an drei verschiedenen Stellen zweipunktig berühren; wir finden dieselbe aus der Formel:

$$t = \frac{1}{6} \left\{ r^3 - 3r^2 - 58r - 3r(n + 3m) + 42n + 78m \right\}^1),$$

wo wir der Einfachheit halber, denn die Formel wird in den griechischen Buchstaben sehr complicirt, die lateinischen stehen lassen. Wir finden hier nicht nur für einen beliebigen Kegelschnitt oder

¹⁾ SALMON-FIEDLER l. c. S. 662, oder in etwas andrer Form PASCAL-SCHEPP „Repertorium“, II, S. 227, oder CREMONA CURTZE, „Grundzüge einer allg. Th. d. Oberflächen“. S. 87.

eine Parabel, sondern auch für den Kreis, $t = 0$; in Bezug auf den Kreis gilt aber die gleiche Bemerkung wie oben.

Endlich fügen wir noch hinzu die Ordnung R der developpablen Fläche, deren Rückkehrkante die Doppelcurve der cyklographischen Fläche ist, und für welche die Formel gilt:

$$R = r n + 6 r - 3 m - 9 n - 3 \theta - 2 \Delta, \text{ oder} \\ R = 4(\nu + 3)(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) - 16(\mu + \nu) - 2\nu^2 + 36\varepsilon + 18\sigma - 2\sigma^2.$$

Hier finden wir für einen beliebigen Kegelschnitt 8, für die Parabel 4, und für den Kreis 4; aber wenn die Curve C ein beliebiger Kegelschnitt ist, so setzt sich die Doppelcurve zusammen aus C , K_x , und zwei Kegelschnitten in den Ebenen durch die Axen des Kegelschnittes senkrecht zur Ebene desselben, und es wird also in der That eine beliebige Gerade von 8 Tangenten der Doppelcurve getroffen. Bei der Parabel ist K_x eine $(\nu - \sigma)$ -fache, also nur eine einfache Curve, und die ganze Doppelcurve besteht aus der gegebenen Parabel und einer zweiten in der Ebene durch die Axe der ersten; es ist also richtig $R = 4$. Und beim Kreise endlich besteht die Doppelcurve aus C , K_x , und den beiden Spitzen der Kegel in welche die cyklographische Fläche zerfällt; also ebenfalls $R = 4$.

Wir stellen jetzt sämtliche bis jetzt erhaltenen Resultate in folgender Tabelle übersichtlich zusammen, wobei wir die Summen $x + d$, $y + d$, $g + \Delta$, $h + D$ in ihre einzelnen Bestandteile zerlegen. Es ist also:

der Rang der Rückkehrkante, oder die Ordnung der cyklographischen Fläche,

$$r = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) \quad ;$$

die Klasse der Fläche, $n = 2\nu \quad ;$

die Ordnung der Rückkehrkante,

$$m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma) \quad ;$$

die Anzahl der Spitzen der Rückkehrkante,

$$\beta = 12\mu - 4\nu + 6\iota - 24\varepsilon - 12\sigma;$$

die Anzahl der stationären Erzeugenden der Rückkehrkante,

$$\theta = 0 \quad ;$$

die Anzahl der Doppelerzeugenden der Rückkehrkante,

$$d = 0 \quad ;$$

die Anzahl der stationären Schmiegungebenen derselben,

$$\alpha = 2\iota \quad ;$$

die Anzahl der Doppelschmiegungebenen derselben,

$$\Delta = \nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota + \sigma^2 + 2\varepsilon \quad ;$$

die Anzahl der Doppelpunkte derselben,

$$D = \iota + 3(\mu - \nu)$$

die Ordnung der vollständigen Doppelcurve,

$$x = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)^2 - 10\mu - 2\nu - 3\iota + 20\varepsilon + 10\sigma \quad ;$$

der Rang der vollständigen Doppelcurve,

$$R = 4(\nu + 3)(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) - 16(\mu + \nu) - 2\nu^2 + 36\varepsilon + 18\sigma - 2\sigma^2 \quad ;$$

die Anzahl der dreifachen Punkte derselben,

$$t = \frac{1}{6} \left\{ r^3 - 3r^2 - 58r - 3r(n + 3m) + 42n + 78m \right\} \quad ;$$

die Klasse der der Rückkehrkante doppelt umschriebenen Developpabeln,

$$y = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)^2 - 4(\mu + \nu) - \iota + 8\varepsilon + 4\sigma \quad ;$$

die Zahl der Geraden einer Ebene durch welche zwei nicht benachbarte Schmiegungsebenen hindurchgehen, also die Anzahl der Doppeltangenten irgend eines ebenen Schnittes der cyklographischen Fläche, abgesehen von den Δ aus den Doppelschmiegungebenen hervorgehenden,

$$g = \nu(\nu - 1) + \sigma(1 - \sigma) \quad ;$$

die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Rückkehrkante,

$$h = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)^2 - 25\mu + 8\nu - 11\iota + 44\varepsilon + 22\sigma \quad ;$$

die Zahl der die Rückkehrkante berührenden und zugleich anderswo schneidenden Geraden,

$$\gamma = 4 \left\{ (\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma + 6) - 24\mu - 8\iota + 42\varepsilon + 21\sigma \right\} \quad ;$$

endlich das Geschlecht der Rückkehrkante,

$$p = \mu - \nu + \iota - 2\varepsilon - \sigma + 1.$$

§ 7. Wir unterwerfen jetzt die Rückkehrkante der cyklographischen Fläche einer etwas genaueren Prüfung. Die Bildkreise ihrer Punkte sind die Krümmungskreise der Curve C , ihre orthogonale Projektion auf die Ebene B dieser Curve fällt also zusammen mit der Evolute derselben. Es begegnen sich hier, und auch in der nächsten Nummer, unsere Untersuchungen mit denen des Herrn

VERSLUYS ¹⁾, immerhin, den verschiedenen Zwecken entsprechend, nur flüchtig, und mit dem bereits betonten Unterschiede (§ 2) dass hier auch die Singularitäten ε und σ berücksichtigt worden sind.

Infolge der Symmetrie in Bezug auf die Ebene B fallen die Projektionen je zweier Punkte der Raumcurve zusammen; es ist also die Ordnung der Evolute $= \frac{1}{2} m$, d. h. nach der Tabelle der vorhergehenden Nummer ist

$$\text{die Ordnung der Evolute} = \nu + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma.$$

Die Klasse erhalten wir indem wir die Anzahl der Ebenen bestimmen welche durch irgend eine vertikale Gerade gehen und die Rückkehrkante berühren, denn die Spuren dieser Ebenen sind die sämtlichen Tangenten an die Projektion der Curve durch einen Punkt. Es ist diese Zahl im allgemeinen $= r$, infolge der Symmetrie aber in unserm Falle nur $= \frac{1}{2} r$, d. h. es ist

$$\text{die Klasse der Evolute} = \mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma.$$

Betrachten wir eine Spitze der Rückkehrkante. Es schneiden sich in derselben drei aufeinander folgende Erzeugenden der Fläche, folglich berührt ihr Bildkreis die Curve C 4-punktig, und es muss sich also aus der Zahl der Spitzen der Rückkehrkante die Zahl der „Scheitel“ der Curve C ergeben. Allerdings mit einiger Vorsicht. Wir fanden nämlich (§ 4) dass die Berührungspunkte der zweimal $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten an C aus den beiden Punkten I_1, I_2 Spitzen der Rückkehrcurve sind; die Schmiegungebenen derselben gehen durch die Tangenten in I_1 und I_2 an K_∞ , und enthalten somit den Schnittpunkt derselben, oder den Pol von g_∞ in Bezug auf K_∞ , oder, weil K_∞ und der imaginäre Kugelkreis sich gerade auf g_∞ doppelt berühren, den Pol von g_∞ in Bezug auf diesen letzteren, d. h. die der Gerade g_∞ senkrecht zugeordnete Richtung Z_∞ , also das Projektionscentrum für die orthogonale Projektion auf B . Es verlieren also die Spitzen durch die Projektion ihren Charakter, indem sie übergehen in einfache Punkte der Evolute, allerdings in solche wo die Evolute und die Curve C sich berühren, und wir erhalten also zwar den bekannten Satz: „die Curve C und ihre Evolute berühren sich in allen denjenigen Punkten, deren Tan-

¹⁾ l. c. S. 74. ff.

gente durch einen der beiden Kreispunkte geht", aber diese Punkte sind für die Curve C keine Scheitel.

Wir fanden weiter (§ 4) dass jeder einfache Schnittpunkt der Curve C mit g_{∞} in den Berührungspunkten der beiden von ihm an K_{∞} gehenden Tangenten Spitzen der Rückkehrcurve bedingt, deren Schmiegungebenen sich in der Tangente in ihm an C schneiden, und erkennen nun überdies dass die Verbindungslinie dieser beiden Spitzen als die Polare des betrachteten Punktes in Bezug auf K_{∞} durch das Projektionscentrum Z_{∞} geht. Es fallen also die Projektionen der beiden Spitzen zusammen in einen Punkt von g_{∞} , der dem betrachteten Punkte harmonisch zugeordnet ist in Bezug auf die beiden Kreispunkte, und dieser Punkt ist zwar eine Spitze der Evolute (mit auf g_{∞} liegender Rückkehrtangente), führt aber, wie die jetzige Untersuchung gelehrt hat, nicht zu einem Scheitel von C .

Immerhin betonen wir im Vorübergehen den Satz: „jedem einfachen unendlich fernen Punkte der Curve C entspricht als Krümmungsmittelpunkt eine unendlich ferne Spitze der Evolute mit ganz in unendlicher Ferne gelegener Rückkehrtangente, und die beiden einander auf diese Weise zugeordneten Punkte beider Curven liegen in zu einander senkrechten Richtungen.“

Wir wollen nun die Zahl $\beta = 12\mu - 4\nu + 6\iota - 24\varepsilon - 12\sigma$ der Spitzen der Rückkehrkante vermindern um die Zahl $2(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ derjenigen welche in B liegen und also nach dem Obigen beim Projiciren verloren gehen; es bleiben dann noch $12\mu - 6\nu + 6\iota - 20\varepsilon - 10\sigma$ übrig, und diese fallen beim Projiciren paarweise zusammen; wir finden also:

die Anzahl der Rückkehrpunkte der Evolute $= 6\mu - 3\nu + 3\iota - 10\varepsilon - 5\sigma$; von diesen liegen $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ im Unendlichen, den übrigen $5\mu - 3\nu + 3\iota - 8\varepsilon - 3\sigma$ aber entsprechen ebenso viele Scheitel der Curve C .

Für einen beliebigen Kegelschnitt erhalten wir hieraus 4 Spitzen im Endlichen und 2 im Unendlichen, für die Parabel resp. 1 und 0, was offenbar richtig ist.

Was nun die übrigen Schnittpunkte der Evolute mit g_{∞} anbelangt, so ist folgendes zu bemerken: die Berührungspunkte der beiden Tangenten an K_{∞} aus dem unendlich fernen Punkte einer Wendetangente der C sind nach § 4 einfache Punkte der Rückkehrkante, deren Verbindungslinie, wie wir jetzt wieder hinzufügen wollen, durch Z_{∞} geht; jedem der ι Wendepunkte der C entspricht also ein einfacher unendlich ferner Punkt der Evolute, natürlich in einer Richtung senkrecht zur Wendetangente. Endlich ist E_{∞} selbst

Schmiegungebene in den Berührungspunkten sämtlicher Tangenten an K_∞ aus den σ Berührungspunkten von C mit g_∞ , welche Punkte auch wieder, und immer aus dem nämlichen Grunde, paarweise in Geraden durch Z_∞ liegen, und also durch die Projektion übergehen in σ Wendepunkte der Evolute mit unendlich ferner Wendetangente; „jedem Berührungspunkte von C mit g_∞ entspricht also in der Evolute eine unendlich ferne Inflexion mit unendlich ferner Tangente.“

Addiren wir sämtliche unendlich fernen Punkte so erhalten wir:

$$3(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma) + \iota + 3\sigma = \iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma,$$

also wieder die Ordnungszahl der Evolute.

Nachdem jetzt Ordnung, Klasse und Anzahl der Rückkehrpunkte der Evolute bekannt sind kann nunmehr die Anzahl der Doppelpunkte aus der bekannten PLÜCKER'schen Formel ermittelt werden. Jeder derselben ist die Spur einer durch Z_∞ gehenden vierfachen Sekante der Rückkehrkante, und also der gemeinschaftliche Mittelpunkt zweier verschiedener Krümmungskreise; nach Ausführung der Rechnung erhält man folgendes Resultat:

die Anzahl der Doppelpunkte der Evolute ist gleich

$$\frac{1}{2} \left\{ (\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma - 1) - 19\mu + 8\nu - 9\iota + 32\varepsilon + 16\sigma \right\}.$$

Jeder dieser Punkte ist der Mittelpunkt zweier Krümmungskreise.

Soll die Evolute eine Inflexion aufweisen, so muss entweder die Rückkehrkante eine stationäre Erzeugende besitzen, oder aber es muss eine Schmiegungebene durch Z_∞ gehen; das erstere ist nach der Tabelle des § 6, S. 16 nicht der Fall, denn es ist $\theta = 0$, und was das letztere anbetrifft, so sind die Schmiegungebenen durch Z_∞ die $2(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Schmiegungebenen durch die beiden Tangenten in I_1 und I_2 an K_∞ (sieh oben), die zweimal ε Doppelschmiegungebenen durch die nämlichen Tangenten und welche C in den Kreispunkten selbst berühren, und endlich die 2σ -fache Schmiegungebene K_∞ selbst. Die Ebenen der ersten Gruppe ergaben, wie wir sahen, die Berührungspunkte der Evolute mit der Curve C , gewöhnliche Punkte der Evolute; die der zweiten ergeben je einen Wendepunkt auf den Tangenten in I_1 und I_2 an C , und K_∞ fügt zu denselben noch σ auf g_∞ gelegene hinzu. Es ist also:

die Anzahl der Wendepunkte der Evolute $= 2\varepsilon + \sigma$, und von diesen liegen σ im Unendlichen und die übrigen einzeln auf den Tangenten an C in den imaginären Kreispunkten.

Aus der Ordnung, der Klasse und der Zahl der Wendepunkte erhalten wir in bekannter Weise diejenige der Doppeltangenten. Man findet: es ist

die Anzahl der Doppeltangenten der Evolute gleich

$$\frac{1}{2} \left\{ (\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma - 1) - (\iota + 3\mu) \right\}.$$

Für den allgemeinen Kegelschnitt erhält man 3, nämlich die beiden Axen und g_x , für die Parabel 0, wie erforderlich. In complicirteren Fällen zählt g_x für mehrere Doppeltangenten; es liegen ja auf ihr σ Inflexionen und $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Spitzen, für welche die Tangente allemal mit g_x zusammenfällt. Löst man die vielfache Tangente in Doppeltangenten auf, und subtrahiert die erhaltene Zahl von der obigen, so gibt der Rest die Anzahl der Doppelnormalen der Curve C an.¹⁾

Wir discutieren endlich noch die Zahl γ der Punkte der Rückkehrkante durch welche je eine nicht benachbarte Erzeugende der Fläche hindurchgeht; nach Abzug einer gewissen Gruppe von im Unendlichen liegenden Punkten dieser Art und nachheriger Division durch zwei erhalten wir diejenigen Krümmungskreise welche C noch anderswo zweipunktig berühren. Diese abzuziehenden Punkte sind die folgenden. Es schneidet erstens die Rückkehrkante die Curve K_∞ einfach in 2ι Punkten, herrührend von den ι Wendepunkten von C ; durch jeden dieser Punkte gehen, ausser den beiden unendlich benachbarten Erzeugenden die sich in ihm schneiden, $\nu - \sigma - 2$ andre, und es zählen also alle diese Punkte zusammen für $2\iota(\nu - \sigma - 2)$; dieselben sind abzuziehen weil sie offenbar nicht zu den von uns verlangten Kreisen führen.

In zweiter Linie haben wir die 2σ auf K_∞ gelegenen Punkte der Rückkehrkante zu betrachten welche herrühren von den σ Berührungsstellen von C mit g_x , die Punkte also für welche E_x selbst Schmiegungebene ist (§ 3). Es schneiden sich in K_∞ $\nu - \sigma$ Blätter der Fläche, an jeder der von uns betrachteten Stellen aber,

1) Die vorstehenden Resultate sind im Einklang mit den in SALMON-FIEDLER's „Ebene Curven“, 2^e Aufl. S. 122 gegebenen, sobald man bemerkt dass dort vorausgesetzt worden ist, es gehe die Curve C ε -mal durch einen Kreispunkt, während wir, um uns auf reelle Curven beschränken zu können, vorausgesetzt haben sie gehe ε -mal durch beide Kreispunkte. Es ist also in den citirten Formeln jedes ε durch 2ε zu ersetzen.

ausser den beiden durch die Rückkehrkante gehenden, nur $\nu - \sigma - 1$, weil aus einem Berührungspunkte von C mit g_∞ nur noch $\nu - \sigma - 1$ andre Tangenten an dieselbe gehen; an jeder dieser Stellen hat die Rückkehrkante mit jedem dieser Blätter eine zweipunktige Berührung, denn es wird sich aus späteren Betrachtungen ergeben (§ 12), dass von den drei hier unendlich nahe zusammenliegenden unendlich fernen Punkten der Rückkehrkante nur zwei als auf K_∞ liegend betrachtet werden dürfen; es ist also zu subtrahieren die Zahl $4\sigma(\nu - \sigma - 1)$.

Endlich ist noch auf die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ auf K_∞ liegenden Spitzen der Rückkehrkante zu achten, welche von den gewöhnlichen Schnittpunkten von C mit g_∞ herrühren, und durch deren jede $\nu - \sigma - 2$ Blätter der Fläche gehen ausser den drei durch die Rückkehrkante, entsprechend den Tangenten aus einem gewöhnlichen Curvenpunkte an dieselbe. Weil die Rückkehrtangente zugleich eine Tangente von K_∞ ist, so hat die Spitze mit jedem Blatt 3 zusammenfallende Punkte gemein, es ist also schliesslich noch die Zahl $6(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)$ zu subtrahieren.

Führt man nun die Rechnung wirklich durch, so erhält man folgendes Resultat:

es besitzt die Curve C

$$\gamma' = (2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma - 12) \\ + \sigma(\nu - \sigma - 1) - 6\mu + 24\nu - 14\iota + 9\sigma$$

Krümmungskreise, welche sie noch in einem andern Punkte zweipunktig berühren.

Als Beispiel, und teilweise zur Kontrolle, fügen wir die Zahl dieser Kreise hinzu für die verschiedenen Gattungen von Curven dritter Ordnung. Man erhält:

für die	C_6^3	(also die allgemeine C^3)	72;
„ „	C_4^3	(also mit Doppelpunkt)	36;
„ „	C_3^3	(also mit Rückkehrpunkt)	22;
„ „	C_6^3	($\sigma = 1$, welche also g_∞ berührt)	46;
„ „	C_4^3	($\sigma = 1$)	20;
„ „	C_3^3	($\sigma = 1$)	10;
„ „	circulare C_6^3	($\varepsilon = 1$)	0;
„ „	„ C_4^3	($\varepsilon = 1$)	0;
„ „	„ C_3^3	($\varepsilon = 1$)	0.

Die letzten drei Resultate ziehen wir zur Kontrolle heran. Es

hat nämlich ein Kreis mit einer C^3 6 Punkte gemein; ist nun die Curve circular, so hat ein Krümmungskreis mit derselben $3 + 2 = 5$ Punkte gemein, und folglich kann er die Curve nicht überdies noch berühren. Das nämliche gilt auch von einer C^4 welche bicircular ist, also die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten hat; in der That gibt auch in diesem Falle unsere Formel die Zahl 0, ganz gleichgültig ob die Curve noch einen dritten Doppelpunkt besitzt oder nicht. Weiter kann man in dieser Richtung natürlich nicht gehen, weil eine C^5 mit zwei dreifachen Punkten nicht möglich ist.

§ 8. Das System der die Curve C doppelt berührenden Kreise ergibt sich aus der Betrachtung der Doppelcurve der cyklographischen Fläche; die Bildkreise der Punkte dieser Curve sind im allgemeinen Kreise der verlangten Art. Nun setzt sich aber die vollständige Doppelcurve, deren Ordnung x wir der Tabelle auf Seite 17 entnehmen, aus der Curve C , dem $(\nu - \sigma)$ -fachen Kegelschnitt K_∞ , und einer Restcurve zusammen, (§ 3), und es ist klar dass nur diese letztere hier in Betracht kommt; ihre Ordnung $2x'$ erhalten wir indem wir von der Zahl x die Ordnung μ der C und überdies die Zahl $2 \frac{(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)}{1 \cdot 2} = (\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)$ subtrahieren; man findet:

$$2x' = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)^2 - 11\mu - \nu^2 + 2\nu\sigma - \nu - 3\varepsilon + 20\varepsilon - \sigma^2 + 9\sigma.$$

Diese Restcurve nun ist symmetrisch in Bezug auf die Ebene B ; es ist also der Ort der Centra der die Curve C doppelt berührenden Kreise eine ebene Curve von der Ordnung x' . ¹⁾

Die Schnittpunkte der Restdoppelcurve mit der Ebene B sind die folgenden:

a) Die \varkappa Spitzen der C . Nach § 4 sind diese Punkte Doppelpunkte der Rückkehrcurve der cyklographischen Fläche, und die beiden Schmiegeungsebenen in einem solchen Punkte schneiden sich in der Tangente der Spitze. Es gehen also durch den Punkt \varkappa je zwei und zwei unendlich benachbarte Erzeugenden der Fläche,

¹⁾ Man erkennt leicht dass es, um darzutun dass die Zahl x' immer durch 2 teilbar ist, genügt zu zeigen dass $\mu + \nu^2 + \nu + \varepsilon + \sigma^2 - \sigma$ immer gerade ist. Nun ist $\mu = \nu(\nu - 1) - 2\varepsilon - \sigma(\sigma - 1) - 3\varepsilon$, also $\mu + \nu^2 + \nu + \varepsilon + \sigma(\sigma - 1) = 2\nu^2 - 2\varepsilon - 2\varepsilon$, also gerade.

d. h. es schneiden sich in demselben 4 Paare *nicht* benachbarter Erzeugenden, oder es gehen 4 Äste der Doppelcurve durch ihn hindurch, welche aber alle von der nämlichen Tangente, nämlich der Rückkehrtangente von C , berührt werden; zwei dieser Äste bilden die Spitze von C , die beiden andern eine Spitze der Restcurve; in jedem der \varkappa Rückkehrpunkte hat also die Ebene B mit der Restcurve einen dreipunktigen Contact, d. h. es gelten diese Punkte für $3\varkappa$ oder $3\iota + 9(\mu - \nu)$ einfache Schnittpunkte.

b). Die δ Doppelpunkte der C . Jeder dieser Punkte ist der Schnittpunkt von 4 nicht benachbarten Erzeugenden der Fläche, also ein sechsfacher Punkt der vollständigen oder ein vierfacher der Restdoppelcurve, während leicht einzusehen ist dass die Tangenten an die 4 verschiedenen Äste nicht in B liegen. Es gelten also diese Punkte für 4δ einfache Schnittpunkte. Nun ist

$$\begin{aligned} \nu &= \mu(\mu - 1) - 2\delta - 2\varepsilon(\varepsilon - 1) - 3\varkappa & , \text{ und} \\ \varkappa &= \iota + 3(\mu - \nu) & , \text{ folglich} \\ 4\delta &= 2\mu^2 - 20\mu + 16\nu - 4\varepsilon(\varepsilon - 1) - 6\iota. \end{aligned}$$

c). Die einfachen Schnittpunkte mit C der zweimal $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten an C aus den beiden imaginären Kreispunkten. Jede solche Tangente hat mit C im Berührungspunkte 2, und im betreffenden Kreispunkte ε Punkte gemein, aber weder die einen noch die andern gehören der Restdoppelcurve an. Denn was den Berührungspunkt anbetrifft, so ist derselbe nach § 4 eine Spitze der Rückkehrcurve, während die zugehörige Schmiegungeebene die Tangente selbst und den Punkt Z_x enthält und also senkrecht ist zur Ebene B ; nun ist eine Spitze der Rückkehrcurve ein gewöhnlicher Punkt der Doppelcurve, während beide von der nämlichen Gerade berührt werden¹⁾; es geht also nur die Doppelcurve C durch diesen Punkt, nicht aber die Restcurve. Und was die imaginären Kreispunkte anbetrifft, so wissen wir bereits (§ 3) dass dieselben, wie alle anderen Punkte von K_x , $(\nu - \sigma)$ -fache Punkte der Fläche sind; es geht also die Restdoppelcurve ebensowenig durch die Kreispunkte wie durch irgend einen beliebigen andern Punkt von K_x .

Es hat aber die von uns betrachtete Tangente noch $\mu - \varepsilon - 2$ einfache Schnittpunkte mit C gemein und diese sind für die Restcurve Doppelpunkte. Weil nämlich die Tangente selbst auf der

¹⁾ CREMONA-CURTZE „Oberflächen“ S. 90.

Fläche liegt, so gehen durch jeden solchen Schnittpunkt 3 Erzeugenden der Fläche; der Punkt ist also ein dreifacher für die vollständige, und somit ein zweifacher Punkt für die Restdoppelcurve, und die beiden Tangenten an die letztere liegen in der soeben genannten vertikalen Schmiegungeebene, aber nicht in B ; wir erhalten also zwei Schnittpunkte. Und weil es im ganzen $2(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Tangenten, und auf jeder derselben $2(\mu - \varepsilon - 2)$ Schnittpunkte gibt, so erhalten wir, alles zusammen genommen,

$$4(\nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu - \varepsilon - 2).$$

d) Die Schnittpunkte der zwei Gruppen von $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten aus den imaginären Kreispunkten unter sich; jeder solche Punkt ist der Schnittpunkt zweier Erzeugenden der Fläche und somit ein einfacher Punkt der Doppelcurve, und weil er weder auf C noch auf K_∞ liegt so gehört er der Restcurve an. Es sind diese Punkte die sogenannten Brennpunkte der Curve C ; wir finden also im Vorübergehen den Satz:

es besitzt die Curve C $(\nu - 2\varepsilon - \sigma)^2$ Brennpunkte.

e) Endlich sind noch die σ Berührungspunkte von C mit g_∞ zu berücksichtigen. Durch je zwei unendlich benachbarte Schnittpunkte von C mit g_∞ gehen 4 paarweise unendlich benachbarte Tangenten an K_∞ , welche (§ 3) Erzeugenden der Fläche sind. Dieselben bilden ein umgeschriebenes Vierseit dessen eine Diagonale die Gerade g_∞ ist; die beiden andern gehen also durch den Pol von g_∞ in Bezug auf K_∞ , d. h. durch Z_∞ . Eine derselben ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten mit K_∞ , die andre verbindet die beiden letzten Ecken, welche den beiden auf g_∞ liegenden unendlich benachbart sind; diese gehören der Curve C an, jene also der Restcurve, d. h. es geht die Restcurve durch die σ Berührungspunkte hindurch und hat dort durch Z_∞ gehende Tangenten; wir erhalten somit zu den schon vorhandenen Schnittpunkten der Restcurve mit B noch σ einfache hinzu, und wenn wir jetzt alle in den Gruppen $a \dots e$ enthaltenen Punkte addiren, so erhalten wir genau die Zahl $2x'$, womit dieselbe controlirt ist.

Die Anzahl der die Curve C in einem gegebenen Punkte P und überdies noch an einer andern Stelle berührenden Kreise erhalten wir indem wir eine der beiden durch P gehenden Erzeugenden der Fläche mit der Doppelcurve schneiden. Nun wird eine Erzeugende von $r - 4$ nicht benachbarten geschnitten ¹⁾, unter

¹⁾ CREMONA-CURTZÉ „Oberflächen“ S. 12.

diesen befinden sich aber $\nu - \sigma - 1$ welche die gegebene auf K_∞ , und eine welche sie auf C schneidet, sodass für die Restcurve nur $r - (\nu - \sigma) - 4$ übrig bleiben. Indem wir den Wert von r auf Seite 16 einsetzen erhalten wir:

unter den doppelt berührenden Kreisen gibt es jeweils

$$2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4$$

welche die Curve an einer vorgeschriebenen Stelle berühren. Oder anders ausgedrückt:

unter den x' Schnittpunkten einer beliebigen Normale der Curve C (oder Tangente der Evolute) mit dem Ort der Centra der doppelt berührenden Kreise gibt es $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4$, deren zugehörige Kreise die Curve im Fusspunkte der Normale berühren.

Ist P ein Doppelpunkt von C so wird jeder der beiden Zweige von $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 6$ doppelt berührenden Kreisen berührt, denn irgend eine der 4 durch P gehenden Erzeugenden der Fläche wird jetzt in P nicht von einer, sondern von drei andern Erzeugenden geschnitten, und wenn endlich P in eine Spitze fällt, so fallen die beiden beim Doppelpunkte getrennt liegenden Systeme zusammen während die Anzahl der Kreise um eine Einheit wächst. Eine Spitze von C ist nämlich ein Doppelpunkt der Rückkehrcurve der Fläche (§ 4), und die Erzeugenden der Fläche in diesem Punkte sind die Doppelpunktstangenten selbst. Jede derselben wird, *ausser von der andern*, noch von $r - 6$ weiteren Erzeugenden geschnitten ¹⁾; im Unendlichen aber ändert sich nichts, also ist die Anzahl der in der Spitze berührenden doppelt berührenden Kreise $r - 6 - (\nu - \sigma - 1) = 2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 5$.

§ 9. Für unsere weiteren Zwecke ist auch eine genaue Kenntnis des Verhaltens der Doppelcurve in unendlicher Ferne notwendig; wir zählen also die Schnittpunkte mit E_∞ wieder der Reihe nach auf. Hier finden wir in erster Linie die σ Berührungspunkte von C mit g_∞ wieder, von denen im vorhergehenden § sub c) gezeigt worden ist dass in ihnen die Restdoppelcurve die Ebene E_∞ berührt; wir finden also:

- a) 2σ Schnittpunkte in den Berührungspunkten von C mit g_∞ .
- b) Die Schnittpunkte der Tangenten an K_∞ aus den $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkten von C mit g_∞ unter sich, wobei aber

¹⁾ CREMONA-CURTZE „Oberflächen“ S. 88.

die auf C selbst liegenden Schnittpunkte ausser Acht bleiben, eben weil sie auf C und also nicht auf der Restcurve liegen. Jede Tangente muss also mit $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma) - 2$ andern geschnitten werden, sodass wir eine Anzahl Schnittpunkte erhalten gleich

$$2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma - 1).$$

c) Die Schnittpunkte der Tangenten an K_∞ aus den σ Berührungspunkten von C mit g_∞ unter sich, die auf g_∞ selbst liegenden abgerechnet, denn diese sind bereits sub a) berücksichtigt. Bedenkt man dass jede dieser Tangenten für zwei unendlich benachbarte gilt, weil die Schmiegungebene der Rückkehrkante längs derselben mit E_∞ zusammenfällt (§ 4), so sieht man unmittelbar ein dass jeder Schnittpunkt zweier solcher Tangenten für 4 Punkte der Doppelcurve gilt, d. h. dass die Doppelcurve in jedem solchen Punkte einen Doppelpunkt hat und in demselben die Ebene E_∞ berührt. Wir finden also $\frac{4 \cdot 2\sigma(2\sigma - 2)}{2}$ oder $8\sigma(\sigma - 1)$ weitere Punkte.

d) Die Schnittpunkte der sub b) und c) genannten Geraden unter einander. Weil jede Gerade der Gruppe c) doppelt zählt so wird in einem Schnittpunkte einer solchen mit einer Gerade der Gruppe b) die Doppelcurve die Ebene E_∞ berühren längs der letzteren; folglich erhalten wir $2 \cdot 2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)2\sigma$ neue Schnittpunkte.

e) Betrachten wir noch einmal eine Gerade der Gruppe b). Ist S_∞ der zugehörige Schnittpunkt der Curve C mit g_∞ , t_∞ eine der beiden Tangenten aus S_∞ an K_∞ , und T_∞ der Berührungspunkt, so gehen durch diesen an Erzeugenden der Fläche erstens die Gerade t_∞ selbst, zweitens die beiden dieser Gerade zu beiden Seiten unendlich benachbarten (T_∞ ist eine Spitze der Rückkehrkante, § 4), drittens die $\nu - \sigma - 2$ andern welche T_∞ verbinden mit den Berührungspunkten der aus S_∞ noch an C gehenden Tangenten, im ganzen also $\nu - \sigma + 1$. Durch einen beliebigen Punkt von K_∞ gehen aber nur $\nu - \sigma$, also begegnen wir in T_∞ einem Schnittpunkte von K_∞ mit der Restdoppelcurve, und zwar werden durch T_∞ $\nu - \sigma - 2$ Zweige der Restcurve gehen, entsprechend den Schnittpunkten der einen überzähligen Erzeugende t_∞ mit den $\nu - \sigma - 2$ nicht benachbarten, und alle diese Zweige werden von der Gerade t_∞ berührt, weil die Schmiegungebene längs jeder der $\nu - \sigma - 2$ Erzeugenden durch t_∞ selbst hindurchgeht und also von der Schmiegungeebene längs t_∞ in dieser Gerade selbst geschnitten wird. Wir erhalten somit $2 \cdot 2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)$ weitere Punkte.

f) Betrachten wir auch noch einmal eine Gerade der Gruppe c). S_∞ , S'_∞ seien die beiden unendlich benachbarten Schnittpunkte von C mit g_∞ , t_∞ , t'_∞ die unendlich benachbarten Tangenten aus ihnen an K_∞ , so ist der Schnittpunkt T_∞ der Berührungspunkt. Nun gehen aus S_∞ noch $\nu - \sigma - 1$ Tangenten an C , durch T_∞ also ausser t_∞ , t'_∞ noch $\nu - \sigma - 1$ Erzeugenden, und also im ganzen wieder $\nu - \sigma + 1$. Die eine überzählige schneidet aber jetzt $\nu - \sigma - 1$ nicht benachbarte, es gehen also jetzt durch T_∞ $\nu - \sigma - 1$ Zweige der Restcurve, welche, aus dem nämlichen Grunde wie sub c), alle von t_∞ berührt werden. Allein, was von t_∞ gilt, gilt ebenfalls von t'_∞ . d. h. es hat in diesem Falle jeder der $\nu - \sigma - 1$ Zweige der Restcurve in T_∞ mit E_∞ einen dreipunktigen Contact. Und die auf diese Weise neu hinzukommende Schnittpunkteanzahl ist also $3 \cdot 2 \sigma (\nu - \sigma - 1)$.

g). Wir haben endlich noch die Doppeltangenten der Curve C zu betrachten. Es habe eine solche mit C gemein die benachbarten Punkte R , R' und R_1 , R'_1 , während sie g_∞ in S_∞ schneide, und eine Tangente aus S_∞ an K_∞ mit dieser Curve die Nachbarpunkte T_∞ , T'_∞ gemein habe. Es gehen aus S_∞ an C noch $\nu - \sigma - 2$ Tangenten, und es gehen also durch T_∞ die Erzeugenden $T_\infty R$, $T_\infty R_1$ und noch $\nu - \sigma - 2$ andre, und ebenso durch T'_∞ die Erzeugenden $T'_\infty R'$, $T'_\infty R'_1$ und noch $\nu - \sigma - 2$ andre. Durch jeden dieser beiden Punkte gehen also, wie durch irgend einen andern Punkt von K_∞ , nur $\nu - \sigma$ Erzeugenden, aber während im allgemeinen die zu zwei Nachbarpunkten gehörigen Erzeugenden windschief sind haben hier $T_\infty R$ und $T'_\infty R'_1$, und ebenso $T_\infty R_1$ und $T'_\infty R'$ einen Punkt gemein; und es schneidet also die Restcurve die Ebene E_∞ in T_∞ , während leicht einzusehen ist dass die Tangente der vierte harmonische Strahl zu $T_\infty S_\infty$ in Bezug auf $T_\infty R$, $T_\infty R_1$ ist, d. h. also die Strecke zwischen den Berührungspunkten der Doppeltangente senkrecht halbt.

Die Anzahl dieser letzten Gruppe von Schnittpunkten ist 2τ , oder, indem wir eine der PLÜCKER'schen Formeln benutzen, $\nu(\nu - 1) - \mu - 3 - \sigma(\sigma - 1)$. Und die Addition aller in den Gruppen a).....g) enthaltenen Anzahlen führt in gehöriger Weise wieder zu der Zahl $2\alpha'$.

§ 10. Die Resultate des vorhergehenden Paragraphen sollen jetzt benutzt werden zur Bestimmung der Anzahl und der Natur der vielfachen Punkte unseres Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise. Es kann die Restdoppelcurve keine Doppelpunkte zeigen, ausser etwa in gewissen Punkten welche sie mit C oder

K_∞ gemein hat; denn sobald mehr als zwei Erzeugenden der Fläche sich in nämlichen Punkte begegnen erhält die Doppelcurve mindestens einen dreifachen Punkt; *diese* sind aber für uns von grosser Wichtigkeit, denn ihre Projektionen auf B sind die Mittelpunkte von Kreisen welche die Curve C in drei verschiedenen Punkten berühren; es gilt also deren Anzahl zu bestimmen.

Besitzt die Projektion der Restdoppelcurve Doppelpunkte, so werden diese also herrühren von Geraden senkrecht zur Ebene B welche die Raumcurve in mehr als einem Punkte schneiden, und zwar wird die Anzahl dieser Punkte 4 sein müssen, infolge der Symmetrie der Curve in Bezug auf B ; hieraus ergibt sich dass die Doppelpunkte unsres Ortes Mittelpunkte sind von zwei verschiedenen die Curve C doppelt berührenden Kreisen, und auch die Anzahl *dieser* Punkte ist also für uns von Wichtigkeit.

Zur Bestimmung dieser Anzahlen berechnen wir nun in erster Linie die Klasse des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise. Denken wir irgend eine Gerade g senkrecht zu B . Dieselbe wird nach § 6, S. 17 von R Tangenten der vollständigen Doppelcurve geschnitten, und unter diesen R Tangenten befinden sich ν , welche an C gehen, und 2 an K_∞ ; allein K_∞ ist eine $(\nu - \sigma)$ -fache Curve der Fläche, und kann also aufgefasst werden als die Superposition von $\frac{1}{2}(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)$ Doppelkegelschnitten; jede der beiden Tangenten gilt daher als eine Tangente an jeden dieser Kegelschnitte, beide zusammen gelten also für $(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)$. Subtrahieren wir diese letztere Zahl, vermehrt um ν , von R , so erhalten wir die Anzahl der Punkte von g durch welche nummehr Tangenten der Restdoppelcurve gehen, und diese Tangenten werden infolge der Symmetrie im allgemeinen paarweise mit g in einer Ebene liegen, und die Spur einer solchen Ebene wird eine Tangente sein unseres ebenen Ortes aus dem Fusspunkte der Gerade g in B . Allein auch hier gibt es wieder Ausnahmen; denn die Gerade g enthält den Punkt Z_∞ , und durch diesen gehen erstens die Tangenten in den $(\nu - 2\varepsilon - \sigma)^2$ einfachen Schnittpunkten der Restdoppelcurve mit B (den Brennpunkten von C , § 8, S. 25), und zweitens die Tangenten in den σ unendlich fernen Punkten, welche herrühren von, und zusammenfallen mit, den Berührungspunkten von C mit g_∞ (§ 8, S. 25), und es ist klar dass diese beiden Gruppen von Tangenten hier auszuschliessen sind, weil die Ebenen durch dieselben und g die Raumcurve berühren ohne dass ihre Spuren Tangenten der Projektion derselben sind. Also erst nachdem auch noch die um σ vermehrte Zahl $(\nu - 2\varepsilon - \sigma)^2$ abgezogen ist erhalten wir einen Rest, der, durch 2 geteilt, die Klasse

unseres Ortes ergibt. Nennen wir das Resultat der Division R' , so erhalten wir: *die Klasse des Ortes der Centra der die Curve C doppelt berührenden Kreise ist gleich*

$$R' = 2(\nu + 3)(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) - 8(\mu + \nu) - 2\nu(\nu - \varepsilon - \sigma) \\ - 2\varepsilon(\varepsilon + \sigma - 9) - 2\sigma(\sigma - 4).$$

Nachdem jetzt die Klasse unsrer Curve bestimmt worden ist brauchen wir nur noch die Anzahl ihrer Rückkehrpunkte zu kennen um mittelst einer der PLÜCKER'schen Formeln auch die Anzahl der Doppelpunkte zu erfahren. In Bezug auf die Rückkehrpunkte nun ist folgendes zu bemerken. Es besitzt erstens die Restdoppelcurve κ Rückkehrpunkte in den κ Spitzen der Curve C (§ 8, S. 23), allein diese verschwinden in der Projektion, weil die Tangentialebenen in denselben senkrecht sind zur Ebene B ; in der Projektion erhalten wir hier einfach Übergänge von parasitischen in nicht parasitische Teile. Dann aber zeigt die Restdoppelcurve eine Spitze in jedem Punkte wo die Rückkehrkante von einer diese letztere Curve anderswo berührenden Gerade geschnitten wird; denn in einem solchen Punkte werden zwei längs der Rückkehrkante zusammenstossende Blätter der Fläche von einem einfachen Blatte geschnitten, was, wie die directe Anschauung lehrt, zur Folge hat dass auch die Doppelcurve diesen Punkt enthält, und zwar als Spitze. Die Anzahl dieser Punkte beträgt nach § 7, S. 22 $2\gamma'$; dieselben liegen aber paarweise symmetrisch in Bezug auf B , sodass die Anzahl der Rückkehrpunkte des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise γ' beträgt.

Nennen wir jetzt die Anzahl der Doppelpunkte δ' , so ergibt die PLÜCKER'sche Formel:

$$R' = x'(x' - 1) - 2\delta' - 3\gamma', \text{ oder} \\ \delta' = \frac{1}{2} \left\{ x'(x' - 1) - R' - 3\gamma' \right\}.$$

Allein diese Punkte sind bei weitem nicht alle wirkliche Doppelpunkte, sondern es müssen infolge des complicirten Verhaltens der Restdoppelcurve in unendlicher Ferne mehrere der im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Anzahlen jetzt wieder subtrahiert werden. Vorher aber sei noch bemerkt dass die δ vierfachen Punkte der Restdoppelcurve, welche mit den Doppelpunkten der C zusammenfallen (§ 8, S. 24), durch die Projektion übergehen in Doppelpunkte, und zwar, wie unmittelbar einzusehen, in solche deren

beide Tangenten die Winkel der Tangenten im nämlichen Punkte an C halbieren; und zweitens dass die § 8, S. 24 sub c) genannten Punkte, welche Doppelpunkte für die Restdoppelcurve sind, diesen Charakter durch die Projektion verlieren, wiederum infolge der Symmetrie.

Es kommen jetzt in Wegfall:

1°. die Punkte sub c) § 9, S. 27, deren Anzahl $2\sigma(\sigma - 1)$ beträgt, und in deren jedem die Restdoppelcurve einen Doppelpunkt besitzt mit mit E_∞ zusammenfallender Tangentialebene. Es liegen diese Punkte zu je zwei und zwei auf Geraden durch Z_∞ , sie projicieren sich also in $\sigma(\sigma - 1)$ Punkte auf g_∞ , und diese Projektionen sind offenbar Berührungsknoten für unsern Ort der Centra, so dass jeder derselben zwei Doppelpunkte absorbiert, im ganzen also $2\sigma(\sigma - 1)$;

2°. die Punkte T_∞ sub e) § 9, S. 27, durch deren jeden die Restdoppelcurve $\nu - \sigma - 2$ Zweige hindurchschickt, alle mit der nämlichen Tangente t_∞ . Auch diese Punkte liegen paarweise auf Geraden durch Z_∞ , sie projicieren sich also in $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Punkte von g_∞ , und es wird in denselben die Gerade g_∞ von $\nu - \sigma - 2$ Zweigen des ebenen Ortes der Centra berührt, sodass wir es hier zu tun haben mit einer Vereinigung von zwei $(\nu - \sigma - 2)$ -fachen Punkten, oder von $(\nu - \sigma - 2)(\nu - \sigma - 3)$ Doppelpunkten. Weil die Anzahl der hier in Betracht kommenden Punkte $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ ist, so kommen also im ganzen in Wegfall $(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)(\nu - \sigma - 3)$ Doppelpunkte;

3°. die Punkte T_∞ sub f) § 9, S. 28. Durch jeden derselben gehen $\nu - \sigma - 1$ Zweige der Restcurve, und jeder dieser Zweige hat in T_∞ mit E_∞ einen dreipunktigen Contact. Es gibt 2σ solcher Punkte, allein auch diese liegen wiederum paarweise in Geraden durch Z_∞ , und projicieren sich also in σ Punkte von g_∞ . Durch jeden derselben gehen $\nu - \sigma - 1$ Zweige des Ortes der Centra, und jeder derselben hat im betreffenden Punkte einen Wendepunkt mit mit g_∞ zusammenfallender Tangente. Es liegen also jetzt drei $(\nu - \sigma - 1)$ -fache Punkte unendlich nahe zusammen, d. h. jeder solche Punkt absorbiert $\frac{3}{2}(\nu - \sigma - 1)(\nu - \sigma - 2)$ Doppelpunkte;

es sind also im ganzen zu subtrahieren $\frac{3}{2}\sigma(\nu - \sigma - 1)(\nu - \sigma - 2)$ Doppelpunkte.

Nennen wir das Resultat der Subtraktion \mathcal{J}^* , so erhalten wir:

$$\mathcal{J}^* = \frac{1}{2} \left\{ x' (x' - 1) - R' - 3\gamma' \right\} - 2\sigma(\sigma - 1) - \left\{ (\mu - 2\varepsilon - 2\sigma) \right. \\ \left. (\nu - \sigma - 3) + \frac{3}{2}\sigma(\nu - \sigma - 1) \right\} (\nu - \sigma - 2).$$

Allein jetzt haben wir immer noch nicht die wirklichen Doppelpunkte, denn unter den \mathcal{J}^* Doppelpunkten befinden sich auch noch die dreifachen, d. h. die Centra der die Curve C dreimal berührenden Kreise. Wir geben die Bestimmung dieser letzteren in der nächsten Nummer, wollen aber vorher zum Schlusse des jetzigen § die verschiedenen unendlich fernen Punkte des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise tabellarisch zusammenstellen. *Es besitzt dieser Ort auf g_∞ :*

a). σ einfache Punkte in den Berührungspunkten von C mit g_∞ ; (Gruppe a des § 9);

b). $(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma - 1)$ weitere einfache Punkte (Gruppe b des § 9), in Richtungen welche die Winkel der Asymptoten der Curve C halbieren;

c). $\sigma(\sigma - 1)$ Berührungsknoten mit mit g_∞ zusammenfallender Tangente (Gruppe c des § 9), in Richtungen welche die Winkel der Geraden nach den Berührungspunkten von C mit g_∞ halbieren;

d). $2\sigma(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ einfache Punkte, in denen aber die Curve die Gerade g_∞ berührt (Gruppe d des § 9), in Richtungen welche die Winkel zwischen je einer Asymptote und einer Gerade nach einem Berührungspunkt von C mit g_∞ halbieren;

e). $(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Punkte in Richtungen welche denen der $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkte von C mit g_∞ senkrecht zugeordnet sind, und in deren jedem $\nu - \sigma - 2$ Zweige der Curve die Gerade g_∞ berühren (Gruppe e des § 9);

f). σ Punkte in Richtungen welche denen der σ Berührungspunkte von C mit g_∞ senkrecht zugeordnet sind, und in deren jedem $\nu - \sigma - 1$ Zweige der Curve die Gerade g_∞ osculieren (Gruppe f des § 9);

g). τ einfache Schnittpunkte, entsprechend den τ Doppeltangenten der C ; die zugehörigen Asymptoten sind die Geraden, welche die Strecken zwischen den beiden Berührungspunkten jeder Doppeltangente senkrecht halbieren (Gruppe g des § 9).

§ 11. In der Tabelle des § 6, S. 17, findet sich der Vollständigkeit halber auch eine Formel für die Anzahl der dreifachen Punkte der Doppelcurve unserer cyklographischen Fläche, allein es muss bemerkt werden dass diese Formel uns hier nicht nützen kann. Denn es bezieht sich dieselbe auf die *vollständige Doppelcurve*, und

diese hat, sobald $\nu - \sigma > 2$ ist, unendlich viele dreifachen Punkte, weil ja der Kegelschnitt K_∞ eine $(\nu - \sigma)$ -fache Curve ist. Wir brauchen also eine Formel für die Anzahl der dreifachen Punkte der *Restdoppelcurve*, und erhalten dieselbe indem wir der Methode folgen nach welcher CREMONA ¹⁾ im allgemeinen Falle die entsprechende Formel für die nicht degenerirte vollständige Doppelcurve gefunden hat, und welche einfach herein besteht dass man die sämtlichen Schnittpunkte der Curve mit der zweiten Polarfläche irgend eines Poles O in Bezug auf die cyklographische Fläche bestimmt, und bemerkt dass sich unter diesen auch die gesuchten Punkte vorfinden müssen, weil die dreifachen Punkte der Doppelcurve zugleich dreifache Punkte der Fläche, und deshalb auf der zweiten Polarfläche irgend eines beliebigen Poles gelegen sein müssen. Überdies zählt jeder solche Punkt für 3 einfache Schnittpunkte, eben als dreifacher Punkt der Curve. Wir haben also folgendes: es ist die Ordnung der Restdoppelcurve $2x'$ (§ 8, S. 23), diejenige irgend einer zweiten Polarfläche $r - 2$, und somit die Anzahl der Schnittpunkte beider $2x'(r - 2)$, und diese Schnittpunkte setzen sich nun in unserm Falle aus den folgenden zehn Gruppen zusammen:

1°. den Punkten, in denen die Erzeugenden der Fläche, längs welcher die $n = 2\nu$ Tangentialebenen aus O an dieselbe sie berühren, von anderen Erzeugenden geschnitten werden. Denn diese Punkte sind für den vollständigen Querschnitt einer solchen Tangentialebene mit der Fläche selbst dreifach (dieser Querschnitt besteht nämlich aus einer Curve von der Ordnung $r - 2$ und der Berührungserzeugende doppelt gezählt), also mit der ersten Polarfläche von O zweifach, und also mit der zweiten einfach. Nun wird jede solche Berührungserzeugende von $r - 4$ anderen geschnitten; einer dieser Schnittpunkte liegt aber auf C , $\nu - \sigma - 1$ andere liegen vereinigt auf K_∞ , auf der Restcurve liegen also nicht mehr als $r - \nu + \sigma - 4$, und es besteht also diese erste Gruppe aus $n(r - \nu + \sigma - 4)$ Punkten.

2°. Ein Doppelpunkt der Rückkehrcurve ist für die Doppelcurve vierfach, und gilt für zwölf Durchschnittpunkte der letzteren Curve mit der zweiten Polarfläche irgend eines Poles O . ²⁾ Nun besitzt unsere Rückkehrcurve in der That Doppelpunkte, und zwar in den Spitzen der Curve C , deren Anzahl $z = \iota + 3(\mu - \nu)$ ist; in jedem

¹⁾ „Oberflächen“ S. 87, ff.

²⁾ CREMONA-CURTZE „Oberflächen“, S. 89.

dieser Punkte besitzt nicht nur die Curve C , sondern auch die Restcurve eine Spitze (§ 8, S. 24), beide mit der nämlichen Tangente, d. h. es verhalten sich die Curve C und die Restcurve in diesen Punkten ganz gleich, und wenn also ein solcher Punkt in Bezug auf die vollständige Doppelcurve 12 Schnittpunkte absorbiert, so repräsentirt er für die Restcurve deren sechs. Und es besteht also diese zweite Gruppe aus

$$6D = 6\kappa = 6\iota + 18(\mu - \nu) \quad \text{Punkten.}$$

3°. Ein Rückkehrpunkt der Rückkehrcurve ist für die Fläche, als Schnittpunkt dreier Erzeugenden, ein dreifacher Punkt, aber von der besonderen Eigenschaft dass der kubische Berührungskegel aus drei mit der Tangentialebene zusammenfallenden Ebenen besteht. Irgend eine erste Polarfläche hat also in ihm einen uniplanaren Doppelpunkt, und jede zweite Polarfläche geht einfach durch ihn hindurch, und berührt in ihm die Tangentialebene der Fläche, und damit auch die Doppelcurve, denn die Doppelcurve und die Rückkehrkante haben in einer Spitze der letzteren die nämliche Tangente. ¹⁾ Wir erhalten also als dritte Gruppe von Schnittpunkten die Anzahl der Rückkehrpunkte der Rückkehrkante, multipliziert mit zwei. Allein vorher sind abzuziehen die $2(\nu - 2\varepsilon - \sigma)$ in den Berührungspunkten der Tangenten aus den beiden Kreispunkten an C liegenden (§ 4, S. 10), weil diese von der Doppelcurve C , nicht aber von der Restcurve berührt werden, und überdies wollen wir auch noch die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ auf K_∞ liegenden Spitzen subtrahieren (§ 4, S. 11), denn diese zeigen ein weit complicirteres Verhalten, und sollen also weiter unten (sub 7) für sich untersucht werden.

Es ist nun die Anzahl der Spitzen überhaupt (§ 6, S. 16):

$$\beta = 12\mu - 4\nu + 6\iota - 24\varepsilon - 12\sigma;$$

subtrahiert müssen werden: $2\mu + 2\nu - 8\varepsilon - 6\sigma$, sodass übrig bleiben

$$10\mu - 6\nu + 6\iota - 16\varepsilon - 6\sigma;$$

und diese Anzahl, multipliziert mit zwei, ergibt als Beitrag dieser dritten Gruppe

$$4(5\mu - 3\nu + 3\iota - 8\varepsilon - 3\sigma).$$

¹⁾ CREMONA-CURTZE „Oberflächen“ S. 90.

4°. Die zweite Polarfläche eines beliebigen Poles hat mit der Doppelcurve einen dreipunktigen Contact in jedem Punkte der Rückkehrkante wo diese letztere von einer anderswo berührenden Erzeugende der Fläche geschnitten wird ¹⁾; jeder solche Punkt ist nämlich ein Rückkehrpunkt für die Doppelcurve, während sich zeigt dass irgend eine zweite Polarfläche die Rückkehrtangente berührt. Die Anzahl der auf der Restdoppelcurve liegenden Punkte dieser Art ist $2\gamma'$ (§ 7, S. 22), der zu unserer Schnittpunkte-anzahl beigesteuerte Betrag also $6\gamma'$.

5°. Ein Doppelpunkt der Curve C ist der Schnittpunkt von 4 Erzeugenden der Fläche, und also für diese ein vierfacher Punkt; jede zweite Polarfläche geht also zweimal durch ihn hindurch, und weil er auch ein vierfacher Punkt für die Restdoppelcurve ist (§ 8, S. 24) so zählt er für 8 einfache Schnittpunkte beider; wir erhalten also eine weitere Anzahl von

$$8\delta = 4\{\mu^2 - 10\mu + 8\nu - 2\varepsilon(\varepsilon - 1) - 3\iota\}.$$

6°. Aus jedem der beiden Kreispunkte gehen an C $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten, deren jede die Curve in $\mu - \varepsilon - 2$ einfachen Punkten schneidet; diese Punkte sind dreifache Punkte für die cyklographische Fläche und Doppelpunkte für die Restdoppelcurve (§ 8, S. 24), durch jeden geht also die zweite Polarfläche einfach hindurch, während er für zwei der gesuchten Schnittpunkte gilt; der jetzige Beitrag ist also

$$4(\nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu - \varepsilon - 2).$$

7°. Jetzt müssen endlich noch einige Gruppen von unendlich fernen Punkten der Restdoppelcurve in Betracht gezogen werden. Nehmen wir zuerst die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Berührungspunkte auf K_∞ der Tangenten aus den einfachen Schnittpunkten von C mit g_∞ an jenen gezogen (§ 9, S. 27, e). Durch einen solchen Punkt gehen $\nu - \sigma + 1$ Blätter der Fläche, alle die Tangente an K_∞ berührend, und $\nu - \sigma - 2$ Zweige der Restdoppelcurve, ebenfalls diese Gerade berührend, er absorbiert also $2(\nu - \sigma - 1)(\nu - \sigma - 2)$ Schnittpunkte der Restcurve mit irgend einer zweiten Polarfläche, denn von dieser letzteren gehen offenbar $\nu - \sigma - 1$ Blätter, auch wieder die nämliche Gerade berührend, durch ihn hindurch. Zusammenfassend erhalten wir also $2 \cdot 2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 1)(\nu - \sigma - 2)$ neue Punkte.

1) CREMONA-CURTZE „Oberflächen“ S. 90.

8°. Jetzt nehmen wir einen Punkt T_∞ der Gruppe f , § 9, S. 28. Durch diesen gehen $\nu - \sigma + 1$ Blätter der Fläche selbst, also $\nu - \sigma - 1$ irgend einer zweiten Polarfläche, und $\nu - \sigma - 1$ Zweige der Restcurve, alle die Tangente an K_∞ im betreffenden Punkte, und die unendlich benachbarte, berührend; zusammengenommen erhalten wir also $3 \cdot 2 \sigma (\nu - \sigma - 1)^2$.

9°. Auch müssen wir noch die Punkte der Gruppe g , § 9, S. 28 ins Auge fassen, welche herrühren von den Doppeltangenten der Curve C . Es schneidet in diesen Punkten die Restdoppelcurve K_∞ einfach, und durch K_∞ gehen an dieser Stelle $\nu - \sigma$ Blätter der Fläche selbst, und also $\nu - \sigma - 2$ jeder zweiten Polarfläche; die Gesamtzahl der Schnittpunkte ist also

$$2 \tau (\nu - \sigma - 2) = (\nu - \sigma - 2) \{ \nu (\nu - 1) - \mu - 3 \iota - \sigma (\sigma - 1) \}.$$

10°. Und schliesslich müssen wir der Punkte gedenken um die es ja eigentlich geht, nämlich der dreifachen Punkte der Restdoppelcurve, deren Anzahl wir gleich $2 t'$ setzen wollen, weil sie paarweise symmetrisch liegen in Bezug auf B und es uns um ihre Projektionen zu tun ist. Wir erhalten also als letzten Beitrag $6 t'$, denn durch jeden der $2 t'$ Punkte, welche sowohl für die Doppelcurve wie für die Fläche dreifach sind, geht eine zweite Polarfläche einfach hindurch.

Eine Gleichung zur Bestimmung der Zahl t' erhalten wir nun indem wir die Summe der in den vorhergehenden zehn Gruppen enthaltenen Anzahlen gleichsetzen der eingangs dieses § gefundenen vollständigen Anzahl $2 x' (r - 2)$. Führt man die Rechnung wirklich durch, so erhält man eine aus 39 Gliedern bestehende Formel, welche allen Versuchen, diese Glieder in einfachere Klammerausdrücke zusammenzufassen, widerstanden hat, sodass wir genötigt sind dieselben in extenso hinzuschreiben. So erhalten wir denn folgenden Satz:

Es gibt:

$$t' = \frac{1}{6} \left\{ 4 \mu^3 + 12 \mu^2 \nu - 24 \mu^2 \varepsilon - 12 \mu^2 \sigma + 6 \mu \nu^2 + 48 \mu \varepsilon^2 + 6 \mu \sigma^2 - 48 \mu \nu \varepsilon - 12 \mu \nu \sigma + 48 \mu \varepsilon \sigma + \nu^3 - 12 \nu^2 \varepsilon - 3 \nu^2 \sigma + 48 \nu \varepsilon^2 + 3 \nu \sigma^2 + 24 \nu \varepsilon \sigma - 32 \varepsilon^3 - 48 \varepsilon^2 \sigma - 12 \varepsilon \sigma^2 - \sigma^3 - 66 \mu^2 - 45 \mu \nu - 18 \mu \iota + 252 \mu \varepsilon + 93 \mu \sigma - 3 \nu^2 - 9 \nu \iota + 84 \nu \varepsilon + 24 \nu \sigma - 240 \varepsilon^2 + 36 \varepsilon \iota - 180 \varepsilon \sigma - 21 \sigma^2 + 9 \sigma \iota + 194 \mu - 58 \nu + 78 \iota - 304 \varepsilon - 122 \sigma \right\}$$

Kreise, welche die Curve C in 3 verschiedenen Punkten berühren.

Wir besitzen für diese Formel mehrere Kontrollmittel. Erstens muss die rechte Seite immer durch 6 teilbar sein. Nun sind eine ganze Anzahl von Coefficienten an und für sich schon durch 6 teilbar; fassen wir die anderen Glieder zusammen, so lassen sich dieselben in folgende Klammerausdrücke einordnen:

$$3(\nu + \sigma)(\mu + \nu^2 + \nu + \iota + \sigma^2 - \sigma) + 2\{\mu(2\mu^2 + 1) - \nu(\nu^2 - 1) - \varepsilon(\varepsilon^2 + 2) + \sigma(\sigma^2 - 1)\}.$$

Und nun ist $\mu + \nu^2 + \nu + \iota + \sigma^2 - \sigma$ nach der Bemerkung § 8, S. 23 unten immer eine gerade Zahl, während, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke $\mu(2\mu^2 + 1)$, $\nu(\nu^2 - 1)$, $\varepsilon(\varepsilon^2 + 2)$, $\sigma(\sigma^2 - 1)$ einzeln immer den Factor 3 enthalten. Also, u. s. w.

Dann gibt es eine ziemliche Anzahl von Fällen wo dreifach berührende Kreise unmöglich sind, wie z. B. beim allgemeinen Kegelschnitt und bei der Parabel, und ebenfalls, was wichtiger ist, bei der circularen C_6^3 , C_4^3 und C_3^3 , und den verschiedenen Varietäten von bicircularen C^4 . In allen diesen Fällen gibt die Formel die richtige Antwort. ¹⁾

Nachdem jetzt die Anzahl der dreifachen Punkte des Ortes der Centra der doppelt berührenden Kreise aufgefunden ist, kann nunmehr auch die Anzahl der wirklichen Doppelpunkte dieser Curve bestimmt werden, denn dieselbe ist einfach gleich $\delta^* - 3t'$, wo δ^* der Formel des § 10, S. 32 zu entnehmen ist. Vermindern wir diese Zahl nun auch noch um die Zahl δ , also die Anzahl der Doppelpunkte der gegebenen Curve C , welche ebenfalls Doppelpunkte unserer neuen Curve sind, so erhalten wir die Anzahl derjenigen Punkte der Ebene B welche Mittelpunkte sind von 2 verschiedenen die Curve C doppelt berührenden Kreisen. Also:

Es gibt in der Ebene der Curve C $\delta^ - \delta - 3t'$ Punkte, welche Mittelpunkte sind von zwei verschiedenen die Curve C doppelt berührenden Kreisen.*

Die in dieser Formel auftretenden Grössen γ' , x' , δ , R' , t' finden sich der Reihe nach vor in § 7, S. 22, § 8, S. 23, 24, § 10, S. 30, § 11, S. 36.

¹⁾ Wir werden weiterhin, § 15, noch eine weit schärfere Kontrolle finden.

ZWEITER TEIL.

Anwendungen.

§ 12. Wir wollen nun die im ersten Teile dieser Arbeit studierte cyklographische Fläche dazu benutzen weitere Anzahlen herzuleiten welche in Beziehung stehen zu den Kreisen welche die Curve C unter vorgeschriebenen Bedingungen berühren, und fangen an mit der Frage nach denjenigen unter ihnen welche durch einen willkürlich gegebenen Punkt P gehen. Sämtliche Kreise durch P sind die Bildkreise der Punkte eines gleichseitigen Rotationskegels, dessen Spitze in P liegt und dessen Achse in diesem Punkte senkrecht steht auf der Ebene B , eines Kegels also, für welchen die Ebene B eine Symmetrieebene ist; und die verlangten Kreise sind somit die Bildkreise der Durchdringungcurve dieses Kegels mit der cyklographischen Fläche. Diese Durchdringungcurve ist eine Raumcurve von der Ordnung

$$2r = 4(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) \quad , \quad \S 6, \text{ S. } 16,$$

allein dieselbe zerfällt in eine Curve von der Ordnung $2(\nu - \sigma)$, nämlich den Kegelschnitt K_x , $(\nu - \sigma)$ -mal gezählt, weil dieser auf beiden Flächen zugleich liegt, und einen Rest von der Ordnung

$$4\mu + 2\nu - 8\varepsilon - 2\sigma.$$

Dieser Rest ist symmetrisch in Bezug auf B , und somit erhalten wir das Resultat: *der Ort der Mittelpunkte der die Curve C berührenden und überdies durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehenden Kreise ist eine Curve von der Ordnung $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$.*

Einem unendlich fernen Punkte dieser Curve entspricht eine Tangente der Curve C durch P , allein anstatt die Zahl ν zu erhalten erhalten wir $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$. Dieser scheinbare Widerspruch ist aber sehr leicht zu heben. Denn es besteht der Bildkreis eines durch eine bestimmte Gerade unter 45° Neigung zur Ebene B gegebenen unendlich fernen Punktes aus der Spur derjenigen Ebene durch diese Gerade, für welche diese letztere eine Falllinie ist; allein dann gibt eine zur ersteren parallele Gerade im allgemeinen

eine andere Spur, obgleich sie durch den nämlichen unendlich fernen Punkt hindurchgeht; der Bildkreis eines solchen unendlich fernen Punktes ist also bis zu einem gewissen Grade unbestimmt, indem die denselben vertretende Gerade parallel sich selbst verschoben werden darf, und hieraus erklärt sich die Tatsache dass man unter Umständen unter den Lösungen einer cyklographischen Aufgabe gerade Linien erhalten kann welche der Aufgabe nicht in allen Stücken genügen. Im Übrigen sind im vorliegenden Falle die sämtlichen unendlich fernen Punkte unserer Curve leicht aufzufinden; es liegen deren ν in Richtungen senkrecht zu den Tangenten aus P an C , die übrigen $2\mu - 4\varepsilon - \sigma$ erhalten wir in 2 Gruppen von resp. $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ und 3σ . Betrachten wir nämlich einen Punkt T_∞ der Gruppe e) § 9, S. 27. Durch diesen gehen nicht, wie durch irgend einen andern Punkt von K_x , $\nu - \sigma$, sondern $\nu - \sigma + 1$ Blätter der Fläche, und es gibt also das eine überzählige Blatt durch seinen Querschnitt mit dem Kegel einem durch T_∞ gehenden Zweige der Restdurchdringung den Ursprung, und dieser Zweig wird überdies die Tangente t_∞ berühren, weil sowohl das Blatt der Fläche wie der Kegel dies tun, woraus dann weiter hervorgeht dass unsere ebene Curve, welche die Projektion der Restdurchdringung ist, im entsprechenden Punkte die Gerade g_∞ berühren wird; und die Anzahl dieser Berührungspunkte ist $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$, nämlich die Hälfte der Anzahl der Punkte T_∞ . Und die Betrachtung der Punkte T_∞ der Gruppe f § 9, S. 28 führt in analoger Weise zu σ weiteren unendlich fernen Punkten, welche aber Wendepunkte der Curve sind, mit mit g_∞ zusammenfallender Inflexionstangente.

Es schneidet also unsere Curve die Gerade g_x in ν einfachen Punkten, welche in Richtungen liegen senkrecht zu den Tangenten aus P an C ; sie berührt g_x in $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Punkten, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der C ; und sie osculiert g_x in σ Punkten, in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C mit g_x .

Die Rückkehrkante der cyklographischen Fläche ist von der Ordnung

$$m = 2(\nu + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma) \quad (\S 6, \text{ S. } 16),$$

folglich ist die Anzahl der Schnittpunkte derselben mit dem quadratischen Kegel gleich $2m$. Von den unendlich fernen Punkten der Rückkehrkante liegen $m - 2\sigma$ auf K_x ¹⁾, folglich ist die Anzahl der nicht in unendlicher Ferne liegenden Schnittpunkte gleich

¹⁾ Vergleiche die Note im diesem nämlichen §, S. 41.

$m + 2\sigma$. Diese Punkte sind offenbar Spitzen der Durchdringung; ihre Projektionen auf die Ebene B fallen paarweise zusammen, und sind ebenfalls Spitzen der Projektion, und zugleich Mittelpunkte von Krümmungskreisen welche durch P gehen, während sich andererseits aus dem Umstande dass die Durchdringung auf dem quadratischen Kegel liegt leicht ergibt dass weitere Spitzen nicht existieren. Wir erhalten somit folgende Sätze:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise welche durch P gehen und C berühren enthält $\frac{1}{2}m + \sigma = \iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma$ Rückkehrpunkte.

Und: *Von den Krümmungskreisen der Curve C gehen jeweils $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma$ durch einen beliebigen Punkt, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe vom Punktindex $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma$.¹⁾*

Für den allgemeinen Kegelschnitt, die Parabel, und den Kreis, erhält man resp. 6, 4, 0.

Die Restdoppelcurve der cyklographischen Fläche ist § 8, S. 23 zufolge von der Ordnung $2x'$, sodass dieselbe von unserm Kegel in $4x'$ Punkten geschnitten wird, von welchen im Unendlichen liegen die $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)$ Punkte der Gruppe e) § 9, S. 27, die $6\sigma(\nu - \sigma - 1)$ der Gruppe f) ebendasselbst, und die $2\tau = \nu(\nu - 1) - \mu - 3\iota - \sigma(\sigma - 1)$ der darauf folgenden Gruppe g). Werden diese drei Anzahlen subtrahiert so bleiben die im Endlichen befindlichen Schnittpunkte übrig, und diese liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf B und stellen die Doppelpunkte der Durchdringung dar, während ihre Projektionen die Doppelpunkte unserer ebenen Curve und zugleich die Mittelpunkte derjenigen doppelt berührenden Kreise sind welche durch P gehen. Die Rechnung nun ergibt folgendes:

Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise welche durch P gehen und C berühren enthält

$$\frac{1}{2} \left\{ (2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 13\mu - \nu - 3\iota + 24\varepsilon + 7\sigma \right\}$$

Doppelpunkte. Und:

Von den die Curve C doppelt berührenden Kreisen gehen jeweils $\frac{1}{2} \left\{ (2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 13\mu - \nu - 3\iota + 24\varepsilon + 7\sigma \right\}$ durch einen beliebigen Punkt, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe mit der genannten Zahl als Punktindex.

1) CREMONA-CURTZE „Einleitung etc.“ S. 48.

Beiläufig sei bemerkt dass man, wenn man beweisen will dass der Klammerausdruck gerade ist, wieder auf den Ausdruck $\mu + \nu^2 + \nu + \iota + \sigma^2 - \sigma$ und damit auf die Bemerkung des § 8, S. 23 geführt wird, womit der Beweis geleistet ist. Für allgemeinen Kegelschnitt, Parabel und Kreis gibt die Formel bez. die Anzahlen 4, 2, 0.

Aus der Ordnung, der Anzahl der Doppelpunkte und derjenigen der Rückkehrpunkte lassen sich nun in bekannter Weise die übrigen Singularitäten herleiten; insbesondere findet man für die Klasse das merkwürdig einfache Resultat $2\mu - 2\varepsilon$, welches auch deswegen auffällig ist weil weder ν noch ι noch σ darin auftreten.

Wird P auf der Curve C selbst gewählt so berühren Kegel und Fläche sich längs der beiden Erzeugenden in den Tangentialebenen welche die Tangente in P an C enthalten; hieraus folgt dass sich von unserer ebenen Curve die Normale in P zu C , zweimal gezählt, abtrennt, so dass ein Rest übrigbleibt dessen Ordnung um zwei Einheiten niedriger ist als im allgemeinen Falle. Das Büschel der die C in P berührenden Kreise enthält nach früherem *einen* Krümmungskreis und (§ 8, S. 26) $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4$ Kreise welche in P selbst und noch an einer andern Stelle berühren; subtrahieren wir diese beide Anzahlen, die erste mit drei, die andre mit zwei multipliziert ¹⁾, vom Punktindex der Kreisreihe der Krümmungskreise und der doppelt berührenden Kreise, so

¹⁾ Die beiden Erzeugenden welche die Fläche und der Kegel gemein haben enthalten je 2 unendlich benachbarte Punkte der Rückkehrkante; die Schmiegungebenen dieser Punkte sind aber zugleich Tangentialebenen des Kegels, daher die Rückkehrkante an beiden Stellen mit dem Kegel eine dreipunktige Berührung eingeht, oder also 6 Punkte mit demselben gemein hat. Dieselben liegen aber paarweise symmetrisch in Bezug auf B , in der Projektion sind also 3 Einheiten zu subtrahieren. Übrigens ist dies auch wohl aus planimetrischen Gründen evident, denn durch jeden Punkt einer Curve gehen 3 unendlich benachbarte Krümmungskreise. An den Stellen aber wo die nämlichen Erzeugenden der Doppelcurve begegnen findet eine einfache Berührung statt; diese Punkte zählen also nur doppelt. Zugleich erhalten wir jetzt hier ein Mittel um zu zeigen (vergl. § 7, S. 22) dass von den drei in einem Punkte der Gruppe f , § 9, S. 28 vereinigt liegenden Punkten der Rückkehrkante nur zwei als auf $K\infty$ liegend angesehen werden dürfen. Lägen sie nämlich alle drei auf $K\infty$, so würden sämtliche m unendlich fernen Punkte der Rückkehrkante auf $K\infty$ liegen, und es würde also die letztere den quadratischen Kegel in m endlichen Punkten schneiden, d. h. durch einen beliebigen Punkt P würden $\frac{1}{2}m = \iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma$, und durch einen Punkt der Curve selbst $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma - 3$ Krümmungskreise gehen. Diese Formel gibt für die Parabel die Anzahl 9, was offenbar falsch ist, denn der Krümmungskreis in einem Punkte A schneidet die Parabel noch in einem andern Punkte B ; durch B geht also wenigstens *ein* Krümmungskreis, und nicht kein einziger; anstatt -3σ muss die Formel also das Glied -2σ enthalten, dann aber liegen von den drei unendlich benachbarten Punkten nur zwei auf $K\infty$.

erhalten wir: *durch einen beliebigen Punkt der Curve C gehen $\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma - 3$ Krümmungskreise welche die Curve nicht in diesem Punkte selbst osculieren. Und:*

durch einen beliebigen Punkt der Curve C gehen

$$\frac{1}{2} \left\{ (2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 21\mu - 5\nu - 3\iota + 40\varepsilon + 11\sigma + 16 \right\}$$

doppelt berührende Kreise, deren Berührungspunkte nicht mit diesem Punkte zusammenfallen.

Es gibt die letztere Formel für allgemeinen Kegelschnitt und Parabel null, was offenbar richtig ist, für den Kreis aber 4; allein für den Kreis ist $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma - 4 = -2$, also negativ; die Formel hat somit für den Kreis keinen Sinn.

Man könnte nun weiter den Punkt P in einem Doppelpunkte der C wählen, oder in einer Spitze, u. s. f., oder, ihn wieder von der Curve entfernend, in einem Brennpunkte, etc., allein zur Vermeidung von Weitschweifigkeit gehen wir an allen diesen Problemen mit Stillschweigen vorüber, prinzipiell dürfen sie aber als gelöst betrachtet werden. Nur folgendes fügen wir zum Schlusse noch hinzu; wählt man ausser P noch einen zweiten Punkt Q , so durchdringen sich die beiden zu P und Q gehörigen Kegel in einer zur Ebene B symmetrischen gleichseitigen Hyperbel, welche zwei Punkte von K_∞ enthält, und deshalb die cyklographische Fläche schneidet in

$$2r = 4(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) \text{ Punkten,}$$

von denen aber $2(\nu - \sigma)$ im Unendlichen liegen; subtrahieren wir diese und dividieren den Rest durch zwei, so erhalten wir: *es gibt $2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$ Kreise welche die Curve C berühren und überdies durch zwei beliebige Punkte gehen.*

Es ist diese Zahl genau gleich der Ordnungszahl der in diesem § untersuchten ebenen Curve, was aus der Entstehungsweise beider wohl auch evident ist.

Man kann nun wieder einem der beiden Punkte, oder auch beiden, spezielle Lagen erteilen, und so eine ganze Reihe von Spezialfällen bilden, auf die wir aber hier nicht eingehen wollen.

§ 13. Wenn in der Ebene B eine Gerade g gegeben ist so kann man fragen nach allen Kreisen welche C berühren und g unter einem Winkel von vorgeschriebenem Cosinus schneiden, bez. ebenfalls berühren. Wenn wir uns auf den Fall des Berührens, als den

interessanteren, beschränken, so haben wir zu bemerken dass sämtliche Kreise welche g berühren die cyklographischen Bildkreise aller Punkte derjenigen beiden Ebenen sind welche durch g gehen und unter 45° gegen B geneigt sind. Fassen wir eine dieser Ebenen ins Auge und schneiden dieselbe mit der cyklographischen Fläche, so erhalten wir unmittelbar den nachstehenden Satz:

der Ort der Centra der die Curve C und die Gerade g berührenden Kreise ist eine ebene Curve von der Ordnung

$r = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$, von der Klasse $n = 2\nu$, mit $m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$ Rückkehrpunkten ¹⁾, und $2\alpha' + \mu$ Doppelpunkten.

Nämlich, was die Doppelpunkte anbetrifft, so sind dieselben die Projektionen der Schnittpunkte unserer Ebene mit der Restdoppelcurve (§ 8, S. 23) und mit der Curve C selbst. Die μ mit den Schnittpunkten von g und C zusammenfallenden Doppelpunkte sind, cyklographisch gesprochen, von geringer Bedeutung, die $2\alpha'$ übrigen aber sind die Mittelpunkte derjenigen doppelt berührenden Kreise welche auch g berühren, d. h.:

unter den die Curve C doppelt berührenden Kreisen gibt es jeweils $2\alpha'$ welche überdies noch eine beliebige Gerade berühren, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe vom Tangentialindex $2\alpha'$.

Und entsprechend für die Krümmungskreise:

unter den Krümmungskreisen der Curve C gibt es jeweils $2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$, welche eine beliebige Gerade berühren, oder es bilden diese Kreise eine Kreisreihe vom Tangentialindex $2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$.

Unter den singulären Punkten unseres ebenen Ortes gibt es einen der noch nicht hervorgetreten ist. Es schneidet nämlich die durch g gehende Ebene die Ebene E_∞ in einer Gerade t_∞ welche in einem gewissen Punkte T_∞ den Kegelschnitt K_∞ berührt, und es enthält also der Querschnitt der Ebene mit der cyklographischen Fläche $\nu - \sigma$ Zweige welche alle in T_∞ die Tangente t_∞ berühren. Die übrigen unendlich fernen Punkte des Querschnittes sind die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Schnittpunkte von t_∞ mit den Tangenten an K_∞ aus den *einfachen Schnittpunkten* von C mit g_∞ , und die 2σ Schnittpunkte mit den Tangenten aus den σ *Berührungspunkten* von C mit g_∞ , jeder der letzteren doppelt gezählt, weil die Tangenten selbst für zwei zählen (§ 3, S. 7). Über das Verhalten unseres ebenen Ortes in unendlicher Ferne lässt sich also folgendes sagen:

der Ort der Centra der die Curve C und die Gerade g berührenden

¹⁾ Man vergleiche für diese Zahlen die Tabelle § 6, S. 16.

den Kreise enthält im Unendlichen einen Punkt, in einer Richtung senkrecht zu g , wo $\nu - \sigma$ Zweige die unendlich ferne Gerade berühren, weiter $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ einfache Punkte, und schliesslich 2σ Berührungspunkte mit g_∞ .

Man kann nun wieder der Gerade g eine ganze Reihe von speziellen Lagen erteilen; sie etwa zusammenfallen lassen mit einer beliebigen Tangente, einer Wendetangente, Doppeltangente, Asymptote, einer Gerade welche durch einen der Berührungspunkte von C mit g_∞ geht, u. s. w.; den wichtigsten Spezialfall erhält man aber wenn man g ins Unendliche rückt, und diesen wollen wir daher noch kurz erörtern. Man kann dann für die durch g gehende Ebene jede zu B parallele Ebene nehmen, und erhält daher durch Projektion der Querschnitte auf die Ebene B die zur Curve C gehörigen Parallelcurven. Ordnung, Klasse und Anzahl der Rückkehrpunkte derselben sind einfach gleich Ordnung, Klasse und Ordnungszahl der Rückkehrkante der cyklographischen Fläche, für die Doppelpunkte aber ist die genaue Betrachtung der unendlich fernen Punkte erforderlich. Da erinnern wir uns nun zunächst (§ 8, S. 25, sub e) dass die σ Berührungspunkte von C mit g_∞ zugleich Punkte der Restdoppelcurve sind; ausser diesen enthält die Querschnittebene deren noch $2x' - \sigma$, und dies ist also die Anzahl der nicht in unendlicher Ferne liegenden Doppelpunkte der Parallelcurve.

Nennen wir irgend einen der σ hier in Betracht kommenden Punkte P_∞ . Es gehen von ihm aus zwei Tangenten an K_∞ , welche der cyklographischen Fläche angehören; die Schmiegungebenen längs derselben fallen beide auf E_∞ . P_∞ ist also aufzufassen als der Schnitt der beiden Berührungserzeugenden einer Doppelschmiegungeebene, d. h. es berühren sich in P_∞ zwei Blätter der Fläche, oder schneiden sich in einer Curve mit einem Doppelpunkt in P_∞ (die beiden Zweige sind C und die Restdoppelcurve).

Irgend ein ebener Schnitt durch P_∞ würde nun die beiden Blätter der Fläche schneiden in zwei Curvenästen die sich in P_∞ berühren würden, in unserm Falle aber enthält die Querschnittebene die Tangente an einen der beiden Äste der Doppelcurve (nämlich an C), folglich geht die Berührung über in eine Osculation.

Wenn wir nun, fortfahrend, bemerken dass die $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ einfachen Schnittpunkte von C mit g_∞ gewöhnliche Doppelpunkte der Parallelcurve sind, so bleiben nur noch die imaginären Kreispunkte zu untersuchen übrig. Durch jeden derselben, sagen wir I_1 , gehen $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ Tangenten an C , welche zur Fläche gehören, und deren zugehörige Schmiegungeebenen sämtlich die Tangente in I_1 an K_∞ enthalten (§ 3, S. 9), und ε Doppelschmiegungeebenen,

welche durch die nämliche Tangente an K_x und die ε Tangenten an C gehen. Ein ebener Querschnitt durch g_x geht also mit $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ einzelnen Zweigen durch I_1 , während 2ε andere sich dort paarweise berühren. Und dasselbe gilt von I_2 . Zusammenfassend können wir also sagen:

die Parallelcuren der Curve C sind von der Ordnung $r = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$, und von der Klasse $n = 2\nu$; die Anzahl der Rückkehrpunkte ist gleich $m = 2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)$, die Anzahl der nicht in unendlicher Ferne liegenden Doppelpunkte $2x' - \sigma$, während die unendlich fernen Punkte sich zusammensetzen aus $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ gewöhnlichen Doppelpunkten, σ Punkten wo zwei Curvenäste sich gegenseitig in drei und g_x in zwei Punkten berühren, und den beiden imaginären Kreispunkten. Durch jeden dieser letzteren gehen $\nu - 2\varepsilon - \sigma$ einzelne, und 2ε sich paarweise berührende Äste hindurch. ¹⁾

Die PLÜCKER'schen Formeln gestatten diese Ergebnisse zu kontrolliren, und die Anzahl der Wende- und Doppeltangenten hinzuzufügen; aber aus der planimetrischen Entstehungsweise der Parallelcuren ist ja schon klar dass die Anzahl der Wendepunkte einfach gleich 2ι ist, und dann ergibt sich die Anzahl der Doppeltangenten gleich $2\nu(\nu - 1) - \mu + 2\varepsilon - 2\sigma(\sigma - 1) - 3\iota$.

Es sei ausser der beliebig angenommenen Gerade g noch eine zweite Gerade h gegeben. Schneiden wir eine der zu h gehörigen 45° Ebenen mit den beiden Ebenen durch g so erhalten wir zwei Geraden unter beliebiger Neigung zur Ebene B , deren jede also die cyklographische Fläche in $r = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$ im allgemeinen im Endlichen liegenden Punkten schneidet; also:

es gibt zweimal $2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Kreise welche die Curve C und zwei beliebige Geraden berühren.

Ist C ein Kreis, so erhalten wir die 8 Lösungen eines der Apollonischen Probleme, und wenn C ebenfalls eine Gerade ist die 4 ein- und angeschriebenen Kreise des Dreiecks.

Es seien ein Punkt P und eine Gerade g gegeben. Eine der zu g gehörigen 45° Ebenen schneidet den zu P gehörigen Kegel in einer Parabel, und diese die cyklographische Fläche in $2r = 4(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)$ Punkten, von welchen aber $2(\nu - \sigma)$ im Unendlichen liegen, weil die Parabel K_x berührt; also:

es gibt $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ Kreise welche durch einen Punkt gehen und überdies eine Gerade und die Curve C berühren; ihre Mittel-

¹⁾ Für einen Teil dieser Ergebnisse vergleiche man SALMON-FIEDLER „Ebene Curven“ S. 129, und Versluys l. c. S. 76.

punkte liegen auf der Projektion der Parabel im Raume, also ebenfalls auf einer Parabel, und für diese letztere ist offenbar der Punkt der Brennpunkt, die Gerade die Leitlinie.

Ist auch hier wieder C ein Kreis oder eine Gerade, so erhält man wiederum bekannte elementare Ergebnisse.

Auf die zahlreichen sich hier darbietenden Spezialfälle gehen wir wieder nicht ein.

§ 14. Es sei gegeben ein beliebiger Kreis K . Sämtliche Kreise welche denselben berühren sind die Bildkreise von zwei zur Ebene B symmetrischen gleichseitigen Rotationskegeln, welche sich im Endlichen nur in diesem Kreise durchdringen. Fassen wir einen dieser Kegel ins Auge und schneiden ihn mit der cyklographischen Fläche, so gibt uns die Projektion der Durchdringung auf B den Ort der Mittelpunkte aller Kreise welche zugleich C und K berühren. Nun haben wir bereits im § 12 einen solchen Kegel mit der Fläche geschnitten; allerdings war derselbe damals symmetrisch zur Ebene B , allein dies hat keinen wesentlichen Einfluss auf die Durchdringung selbst, sondern nur auf ihre Projektion; wir werden also hier der Hauptsache nach die doppelten Anzahlen von dort finden müssen.

Wir können das Ergebnis wie folgt in Worte fassen:

der Ort der Centra der die Curve C und einen beliebigen Kreis K berührenden Kreise ist eine Curve von der Ordnung $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$, und welche im Endlichen $2(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 2\sigma)$ Spitzen und $(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 11\mu - \nu - 3\iota + 24\varepsilon + 7\sigma$ Doppelpunkte enthält. Die unendlich fernen Punkte bestehen aus 2ν einfachen Punkten, in Richtungen senkrecht zu den gemeinschaftlichen Tangenten von C und K , $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ Punkten, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der C , wo je 2 Curvenäste einander und g_∞ berühren, und σ Punkten, in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C mit g_∞ , wo je zwei Äste einander und g_∞ osculieren.

Denn was die unendlich fernen Punkte anbetrifft, so sind dieselben im Raume genau die nämlichen wie im § 12, und aus dem nämlichen Grunde wie dort fallen also auch hier die Projektionen derselben paarweise zusammen; aber die durch diese Punkte hindurchgehenden Curvenäste fallen nun in der Projektion nicht mehr paarweise zusammen, daher die Verdoppelung der resp. Anzahlen derselben.

Weiter ist zu bemerken dass wir bei der Anzahl der endlichen Doppelpunkte anstatt 13μ wie auf S. 40 11μ geschrieben haben; dies rührt daher weil der Kreis K die Curve C in 2μ

Punkten schneidet welche sowohl für die Durchdringung selbst wie für die Projektion Doppelpunkte sind; die Anzahl der Doppelpunkte im jetzigen Falle ist also gleich zweimal der Anzahl im früheren Falle, vermehrt um 2μ .

Will man die Klasse der Curve bestimmen, so hat man zu bedenken dass in jedem der $\mu - 2\varepsilon - 2\sigma$ obengenannten unendlich fernen Punkte zwei, und in jedem der σ Punkte sogar drei Doppelpunkte unmittelbar neben einander liegen; mit Berücksichtigung derselben findet man für die Klasse die Zahl

$$2\{(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)^2 - 2\mu + 2\varepsilon + 4\sigma\}.$$

Wenn man im obigen allgemeinen Satze bei der Anzahl der Doppelpunkte die Zahl -11μ wieder ersetzt durch -13μ , so lässt sich aus demselben unmittelbar ablesen wieviel Krümmungskreise oder doppelt berührende Kreise der Curve C einen beliebigen Kreis K berühren; die Anzahlen sind einfach zweimal so gross wie die entsprechenden des § 12. *Und wenn man von diesen beiden Zahlen 4 und resp. 2 Einheiten subtrahiert so hat man die Anzahl der Krümmungskreise welche einen beliebigen Krümmungskreis, und die Anzahl der doppelt berührenden Kreise welche einen beliebigen doppelt berührenden Kreis berühren.* Denn wenn K ein Krümmungskreis wird so fällt die Spitze des zugehörigen Kegels auf die Rückkehrkante der cyklographischen Fläche, und die beiden durch die Kegelspitze gehenden Erzeugenden der Fläche liegen zugleich auf dem Kegel; die Rückkehrkante schneidet also den Kegel in der Spitze und in zwei Nachbarnpunkten, aber diese Punkte zählen für 4, weil die Kegelspitze als Doppelpunkt des Kegels doppelt zählt. Und wenn K ein doppelt berührender Kreis ist so fällt die Kegelspitze auf die Doppelcurve der Fläche, absorbiert aber jetzt, wie leicht zu sehen, nur zwei Schnittpunkte.

Es sei zur Bestimmung von Punkt- und Tangentialindex der hier betrachteten Kreisreihe ausser dem Kreise K ein Punkt P gegeben. Der zu P gehörige Kegel schneidet die beiden zu K gehörigen je in einem Kegelschnitt, dessen unendlich ferne Punkte auf K_∞ liegen und also zusammen $2(\nu - \sigma)$ Schnittpunkte mit der Fläche absorbieren, sodass $2r - 2(\nu - \sigma) = 2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ übrigbleiben. Weil die beiden Kegelschnitte in Bezug auf B symmetrisch liegen, so hat man folgenden Satz:

es gibt $2(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)$ Kreise welche die Curve C und einen beliebigen Kreis K berühren, und überdies durch einen vorgeschriebenen Punkt gehen; die Mittelpunkte derselben liegen auf einem Kegelschnitt.

Ist an Stelle des Punktes P eine Gerade g gegeben, so schneidet eine der beiden 45° Ebenen durch g die beiden zu K gehörigen Kegel in 2 verschiedenen Parabeln, also:

es gibt zwei Systeme von je 2 ($2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$) Kreisen welche C , einen beliebigen Kreis und eine beliebige Gerade berühren, und die Mittelpunkte aller dieser Kreise sind über zwei Parabeln verteilt.

Und wenn endlich zwei Kreise K_1, K_2 gewählt werden, so schneidet einer der beiden zu K_1 gehörigen Kegel die beiden zu K_2 gehörigen in zwei verschiedenen Kegelschnitten;

es gibt also ebenfalls zwei Systeme von je 2 ($2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma$) Kreisen welche C und zwei beliebige Kreise berühren, und die Mittelpunkte aller dieser Kreise sind über zwei Kegelschnitte verteilt.

§ 15. Wir gehen jetzt über zur Betrachtung von zwei Fundamentalcurven C und C_1 zugleich und wollen die beiden zu ihnen gehörigen cyklographischen Flächen mit F und F_1 bezeichnen, und überhaupt alle mit der zweiten Curve oder Fläche in Verbindung stehenden Grössen durch den Index 1 auszeichnen. Die Durchdringung der beiden cyklographischen Flächen muss uns über die Kreise belehren welche die beiden gegebenen Curven zu gleicher Zeit berühren, denn die Projektion der Durchdringung auf die Ebene B ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise. Es setzt sich diese Durchdringung aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus einer gewissen Raumcurve und dem Kegelschnitt K_∞ ; denn letzterer liegt auf beiden Flächen zugleich, und zwar als $(\nu - \sigma)$ -fache Curve auf F und als $(\nu_1 - \sigma_1)$ -fache Curve auf F_1 , woraus sich ergibt dass er bei der Durchdringung als $(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ -fachen Kegelschnitt in Rechnung zu bringen ist, und weil die Ordnungszahl der vollständigen Durchdringung $= rr_1$ ist (§ 6, S. 16), so ist die Raumcurve von der Ordnung $rr_1 - 2(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$, und weil diese letztere symmetrisch ist in Bezug auf die Ebene B so erhalten wir:

der Ort der Centra der die beiden Curven C und C_1 berührenden Kreise ist eine Curve von der Ordnung

$$x'' = 2(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1) - (\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1).$$

Fragen wir zunächst nach dem Verhalten unserer Curve in unendlicher Ferne. Wenn durch einen Punkt von K_∞ genau $(\nu - \sigma)$ Blätter der einen Fläche und $(\nu_1 - \sigma_1)$ der andern gehen, so gilt dieser Punkt als $(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ -facher Punkt der Durchdringung, und gehört als solcher, mit einer einzigen Ausnahme von der gleich nachher die Rede sein soll, zu K_∞ aber nicht zur Raumcurve; die

unendlichen Äste der Raumcurve werden also dort zu suchen sein wo mehr als $(\nu - \sigma)$ und resp. $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter der einen oder andern Fläche in einem Punkte von K_∞ zusammenstossen, das heisst also in den Punkten der Gruppen $e)$ und $f)$ des § 9, S. 27. Betrachten wir einen Punkt T_∞ der Gruppe $e)$. Gehört er zu F so schneidet das eine überzählige Blatt $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter von F_1 , und es gehen also $(\nu_1 - \sigma_1)$ Zweige der Raumcurve durch ihn hindurch, alle die Tangente t_∞ in ihm an K_∞ berührend. Und das entsprechende gilt wenn der Punkt zu F_1 gehört.

Die Anzahlen dieser Punkte sind $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ und resp. $2(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$, und die Punkte und die durch dieselben hindurchgehenden Curvenäste fallen in der Projektion paarweise zusammen.

Ist T_∞ einer der 2σ , resp. $2\sigma_1$, Punkte der Gruppe $f)$, so gehen durch ihn wiederum $(\nu_1 - \sigma_1)$ und resp. $(\nu - \sigma)$ Zweige der Durchdringung; jetzt aber haben dieselben, entsprechend den früheren Erörterungen, mit K_∞ , und also auch unter sich, eine dreipunktige Berührung, und ihre Projektionen fallen wieder paarweise zusammen.

Die Ausnahme, von der oben die Rede war, bezieht sich auf die $\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1$ im Endlichen liegenden gemeinschaftlichen Tangenten von C und C_1 ; wir haben hier genau den nämlichen Fall vor uns wie in der Gruppe $g)$ des § 9, S. 28, und können also unmittelbar hinschreiben dass unsere Raumcurve K_∞ in den $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)$ zu den genannten Tangenten gehörigen Punkten T_∞ einfach schneidet. Und die Projektionen dieser Punkte fallen natürlich wieder paarweise zusammen.

Wir können nun weiter die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Tangenten von K_∞ der Gruppe $e)$ und welche liegen auf der Fläche F mit den entsprechenden Geraden der andern Fläche schneiden; dies gibt $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ einfache Punkte der Durchdringung, in Paaren auf Geraden durch Z_∞ . Wir können aber auch die Geraden der Gruppe $e)$ auf der Fläche F schneiden mit den $2\sigma_1$ Geraden der Gruppe $f)$ auf F_1 und umgekehrt; in diesen Punkten wird die Durchdringung die Ebene E_∞ berühren, und zwar sind die Geraden der Gruppe $e)$ die Tangenten; die Anzahl dieser Punkte beträgt $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)\sigma_1$ und resp. $4(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)\sigma$, sie liegen aber paarweise auf Geraden durch Z_∞ .

Endlich sind die 2σ Geraden der Gruppe $f)$ auf F zu schneiden mit den $2\sigma_1$ entsprechenden auf F_1 ; diese Punkte sind Doppelpunkte der Durchdringung, und die Berührungsebene ist E_∞ ; sie liegen paarweise auf Geraden durch Z_∞ , und in ihren Projektionen

werden zwei Äste der ebenen Curve einander und g_x berühren.

Hiermit sind sämtliche unendlich fernen Punkte unserer ebenen Curve bekannt; fassen wir dieselben zusammen so können wir folgenden Satz aussprechen:

der Ort der Centra der die Curven C und C_1 berührenden Kreise enthält im Unendlichen:

1°. $(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Punkte, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der Curve C , wo $(\nu_1 - \sigma_1)$ Zweige, und $(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ Punkte, in Richtungen senkrecht zu den Asymptoten der Curve C_1 , wo $(\nu - \sigma)$ Zweige einander und g_x berühren;

2°. σ Punkte, in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C mit g_x , wo $(\nu_1 - \sigma_1)$ Zweige, und σ_1 Punkte in Richtungen senkrecht zu denjenigen der Berührungspunkte von C_1 mit g_x , wo $(\nu - \sigma)$ Zweige einander und g_x osculieren;

3°. $(\nu_1 - \sigma_1)$ einfache Punkte, in Richtungen senkrecht zu den gemeinsamen Tangenten von C und C_1 ; die Asymptoten in diesen Punkten halbieren die Strecken zwischen den Berührungspunkten senkrecht;

4°. $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ weitere einfache Punkte, in Richtungen welche die Winkel zwischen je einer Asymptote der Curve C und einer solchen der C_1 halbieren;

5°. $2\sigma_1(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Berührungspunkte mit g_x , in Richtungen welche die Winkel zwischen den Asymptoten der C und den Geraden nach den Berührungspunkten von g_x mit C_1 halbieren, und die $2\sigma(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)$ entsprechenden;

6°. $2\sigma\sigma_1$ Punkte, in Richtungen welche die Winkel der Geraden nach je einem Berührungspunkte von g_x mit C und mit C_1 halbieren; in diesen Punkten berühren zwei Curvenäste einander und g_x .

Vergleicht man diese Resultate mit denen am Schlusse des § 10, (S. 32), so springt die Analogie sofort in die Augen, und die Notwendigkeit dieser Analogie ergibt sich unmittelbar aus folgender Überlegung. Fassen wir die beiden Curven C und C_1 zusammen als ein System $C + C_1$ auf, von der Ordnung $\mu + \mu_1$, der Klasse $\nu + \nu_1$, u. s. w., so setzt sich die zugehörige cyklographische Fläche aus unseren beiden Flächen F und F_1 zusammen; die Rückkehrkante dieser Gesamtfläche besteht einfach aus den beiden Rückkehrkanten von F und F_1 , die Doppelcurve aber ausser aus den beiden Doppelcurven von F und F_1 , aus der Durchdringungscurve der beiden Flächen, um welche es sich ja gerade in diesem § handelt; diese letztere spielt also die Rolle einer Doppelcurve und zeigt deshalb auch ein analoges Verhalten im Unendlichen.

Es kann diese neue Auffassung der Durchdringung dazu benutzt

werden weitere Resultate zu kontrolliren oder geradezu zu finden. Zur Kontrolle wollen wir sie benutzen bei der Bestimmung der Anzahl der im Endlichen liegenden Rückkehrpunkte der Durchdringung. Diese Punkte finden sich offenbar unter den Schnittpunkten der Rückkehrkanten jeder der beiden Flächen mit der jeweiligen andern; nun ist die Rückkehrkante von F von der Ordnung m (§ 6, S. 16), sodass sie die Fläche F_1 in $m r_1$ Punkten schneidet, von welchen aber $(m - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ im Unendlichen liegen. Es bleiben also $m r_1 - (m - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ endliche Schnittpunkte übrig, und diese liegen paarweise symmetrisch in Bezug auf B , und aus dem Schnitt der Rückkehrkante von F_1 mit F entstehen $m_1 r - (m_1 - 2\sigma_1)(\nu - \sigma)$ neue Punkte der nämlichen Art. Wir finden also, indem wir für die m und r die Werte aus der Tabelle substituiren, für den zu untersuchenden ebenen Ort $(\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)(2\mu_1 + \nu_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1) + (\iota_1 + 3\mu_1 - 6\varepsilon_1 - 3\sigma_1)(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma) + \sigma(\nu_1 - \sigma_1) + \sigma_1(\nu - \sigma)$ Spitzen, und können nun diese Zahl sofort mittelst unserer neuen Auffassung der Durchdringung als Bestandteil der Doppelcurve der Gesamtfläche kontrolliren. Dann nämlich sind die obigen Punkte von der Natur der Punkte γ , also Punkte wo die Rückkehrkante der Fläche diese Fläche von neuem schneidet; nehmen wir also die Formel für γ' , § 7, S. 22, ersetzen in derselben μ durch $\mu + \mu_1$, ν durch $\nu + \nu_1$, u. s. w. und subtrahiren dann die Anzahlen γ' und γ'_1 , welche zu C und C_1 gehören, so muss der Rest genau gleich der obigen Zahl der Spitzen sein; man sieht fast ohne Rechnung dass dies in der That der Fall ist ¹⁾.

Schreiben wir das Resultat noch ausdrücklich hin: *der Ort der Centra der die Curven C und C_1 berührenden Kreise enthält* $\gamma'' = (\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)(2\mu_1 + \nu_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1) + (\iota_1 + 3\mu_1 - 6\varepsilon_1 - 3\sigma_1)(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma) + \sigma(\nu_1 - \sigma_1) + \sigma_1(\nu - \sigma)$ *Rückkehrpunkte. Und:*

es gibt $\gamma_{01} = (\iota + 3\mu - 6\varepsilon - 3\sigma)(2\mu_1 + \nu_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1) + \sigma(\nu_1 - \sigma_1)$ *Krümmungskreise der Curven C welche C_1 berühren, und eine entsprechende Anzahl γ_{10} für C_1 und C .*

Unsere Durchdringungscurve erhält einen Doppelpunkt sobald die Doppelcurve von F die Fläche F_1 schneidet oder umgekehrt, oder wenn die beiden Flächen sich berühren. Das letztere ist im Endlichen nicht möglich weil, wenn die Flächen in irgend einem Punkte ihrer Durchdringung die nämliche Tangentialebene hätten,

¹⁾ In derselben Weise ergibt sich die Ordnung unserer Curve aus der Zahl x' des § 8, S. 23; deshalb haben wir dieselbe ebenfalls mit dem Buchstaben x bezeichnet.

die Spur derselben von den beiden Curven C und C_1 im nämlichen Punkte berührt werden müsste, nämlich im Fusspunkte des Perpendikels aus dem Berührungspunkte im Raume auf dieselbe gefällt; dies aber würde eine spezielle Lage der beiden Curven fordern die wir nicht voraussetzen wollen. Im Unendlichen werden sich die Flächen allerdings berühren, und zwar in den Punkten welche herühren von den $(\nu \nu_1 - \sigma \sigma_1)$ gemeinsamen Tangenten der beiden Curven; allein die unendlich fernen Punkte betrachten wir immer für sich. Wir erhalten somit die nicht in unendlicher Ferne liegenden Doppelpunkte der Durchdringung indem wir 1° die Restdoppelcurve von F schneiden mit F_1 und die unendlich fernen Schnittpunkte subtrahieren; 2° das nämliche tun für die Restdoppelcurve von F_1 und die Fläche F ; 3° die Curven C und C_1 mit einander schneiden; denn die $\mu \mu_1$ Punkte dieser letzten Gruppe sind vierfache Punkte der Durchdringung, und gehen in Doppelpunkte über beim Projiciren, cyklographisch aber sind sie offenbar ohne Interesse.

Die Restdoppelcurve von F schneidet F_1 in $2x'.r_1$ Punkten (§ 8, S. 23), von welchen die folgenden im Unendlichen liegen:

1°. die Punkte der Gruppe e) § 9, S. 27. Durch jeden derselben gehen $(\nu - \sigma - 2)$ Zweige der Restcurve von F , und $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter von F_1 , alles mit der nämlichen Tangente; jeder solche Punkt absorbiert also $2(\nu - \sigma - 2)(\nu_1 - \sigma_1)$ Schnittpunkte, und die Anzahl dieser singulären Punkte ist $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$.

2°. die 2σ Punkte der Gruppe f) § 9, S. 28. Durch jeden derselben gehen $(\nu - \sigma - 1)$ Zweige der Restcurve und $(\nu_1 - \sigma_1)$ Blätter von F_1 , aber sowohl die einen wie die anderen haben jetzt mit E_∞ einen dreipunktigen Contact in den nämlichen drei unendlich benachbarten Punkten von K_∞ ; jeder Punkt der jetzigen Gruppe absorbiert also $3(\nu - \sigma - 1)(\nu_1 - \sigma_1)$ Schnittpunkte.

3°. die $2\tau = \nu(\nu - 1) - \mu - 3\nu - \sigma(\sigma - 1)$ einfachen Schnittpunkte der Restcurve von F mit K_∞ ; jeder derselben absorbiert offenbar $(\nu_1 - \sigma_1)$ Schnittpunkte.

Indem wir nun die in diesen drei Gruppen enthaltenen Anzahlen von $2x'.r_1$ subtrahieren, dann das nämliche machen für die Restcurve von F_1 und die Fläche F , und die Resultate addiren, erhalten wir die im Endlichen, aber nicht in B liegenden Doppelpunkte der Durchdringung. Bedenken wir dann endlich dass je zwei dieser Punkte symmetrisch liegen in Bezug auf B , so erhalten wir folgendes Ergebnis: *es gibt*

$$\begin{aligned} \delta_{01} = & x'.r_1 - 2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu - \sigma - 2)(\nu_1 - \sigma_1) - \\ & 3\sigma(\nu - \sigma - 1)(\nu_1 - \sigma_1) - \tau(\nu_1 - \sigma_1) \end{aligned}$$

Kreise welche C doppelt und C_1 einfach berühren; und eine entsprechende Anzahl δ_{10} gilt für C_1 und C .

Dieses neue Resultat liefert uns jetzt eine sehr scharfe Kontrolle für die bereits § 11, S. 36 gefundene Anzahl t' der Kreise welche die Curve C in drei verschiedenen Punkten berühren. Denn wenn wir unsere Durchdringungscurve als Bestandteil der Doppelcurve des Systems $F + F_1$ auffassen, so sind die von uns soeben aufgefundenen Doppelpunkte der Durchdringung offenbar dreifache Punkte der Gesamtdoppelcurve, und ihre Projektionen auf B Centra von Kreisen welche die Curve $C + C_1$ dreimal berühren; wenn wir also in der Formel für t' auf S. 36 μ ersetzen durch $\mu + \mu_1$, ν durch $\nu + \nu_1$, u. s. w., und dann die zu C und C_1 gehörigen Zahlen t' und t'_1 subtrahieren, so muss genau die Summe der im obigen Satze enthaltenen Anzahlen δ_{01} und δ_{10} übrigbleiben; die allerdings etwas umständliche Rechnung bestätigt dies.

Die $\delta_{01} + \delta_{10}$ im obigen Satze aufgefundenen Doppelpunkte stellen nicht sämtliche Doppelpunkte unserer zu untersuchenden Curve dar, auch nicht wenn man noch die $\mu \mu_1$ Schnittpunkte von C und C_1 hinzufügt, denn die Durchdringungscurve wird von einer gewissen Anzahl senkrecht auf der Ebene B stehender Geraden in zwei Paaren von in Bezug auf B symmetrisch liegenden Punkten geschnitten werden, und die Durchstosspunkte dieser Geraden werden also Doppelpunkte der Projektion der Durchdringung sein; cyklographisch unterscheiden sich dieselben von den $\delta_{01} + \delta_{10}$ bereits gefundenen dadurch dass sie nicht die Mittelpunkte sind je eines Kreises der die eine Curve zweimal, die andere einmal berührt, sondern im Gegenteil von je zwei verschiedenen Kreisen welche beide Curven nur einmal berühren; und auch rein äusserlich sind diese scheinbaren Doppelpunkte von den wirklichen leicht zu unterscheiden, denn von diesen letzteren liegen die δ_{01} auf dem Ort der Centra der die Curve C , und die δ_{10} auf dem Ort der Centra der die Curve C_1 doppelt berührenden Kreise.

Die Bestimmung der Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte gelingt nun indem wir, die Durchdringungscurve als Teil der Gesamtdoppelcurve des Systems $F + F_1$ auffassend, zunächst die Klasse ihrer Projektion bestimmen. Dazu brauchen wir einfach in der Formel für R' , § 10, S. 30, die nun schon mehrfach benutzten Substitutionen $\mu + \mu_1$ anstatt μ , u. s. w., zu machen und dann die Zahlen R' und R'_1 zu subtrahieren; man findet dann folgendes Resultat:

die Klasse des Ortes der Centra der die Curven C und C_1 berührenden Kreise ist gleich:

$$R'' = 2\nu(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1) + 2\nu_1(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma) - 2\nu(\nu_1 - \varepsilon_1 - \sigma_1) - 2\nu_1(\nu - \varepsilon - \sigma) - 2\varepsilon(\varepsilon_1 + \sigma_1) - 2\varepsilon_1(\varepsilon + \sigma) - 4\sigma\sigma_1.$$

Und nun gibt die Plückersche Formel:

$$R'' = x''(x'' - 1) - 2\mathcal{J}'' - 3\gamma''$$

sofort:
$$\mathcal{J}'' = \frac{1}{2} \left\{ x''(x'' - 1) - R'' - 3\gamma'' \right\}.$$

Diese Anzahl \mathcal{J}'' enthält nun erstens die $\mathcal{J}_{01} + \mathcal{J}_{10}$ wirklichen Doppelpunkte, zweitens die $\mu\mu_1$ Schnittpunkte von C und C_1 , drittens die vielfachen Punkte im Unendlichen, und endlich viertens die gesuchten scheinbaren Doppelpunkte; es sind also noch die Punkte der dritten Gruppe in einfache Doppelpunkte aufzulösen. Diese Punkte sind die folgenden:

1°) diejenigen der Gruppe 1 S. 50. In jedem derselben liegen zwei $(\nu_1 - \sigma_1)$ -fache, resp. $(\nu - \sigma)$ -fache Punkte unmittelbar neben einander, jeder zählt also für $(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_1 - \sigma_1 - 1)$, resp. $(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1)$ Doppelpunkte; im ganzen erhalten wir also

$$(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_1 - \sigma_1 - 1) + (\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1).$$

2°) die Punkte der Gruppe 2 S. 50. Hier liegen je drei vielfache Punkte unendlich nahe zusammen, sodass wir erhalten

$$\frac{3}{2}\sigma(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_1 - \sigma_1 - 1) + \frac{3}{2}\sigma_1(\nu - \sigma)(\nu - \sigma - 1).$$

3°) die Punkte der Gruppe 6 S. 50. Jeder derselben zählt für zwei Doppelpunkte, und die Anzahl der Punkte ist $2\sigma\sigma_1$, also erhalten wir einen letzten Beitrag von $4\sigma\sigma_1$.

Bezeichnen wir die Summe der in diesen drei Gruppen enthaltenen Anzahlen mit \mathcal{J}_x , die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte aber mit \mathcal{J}^* , so ist nun

$$\mathcal{J}^* = \mathcal{J}'' - \mu\mu_1 - \mathcal{J}_{01} - \mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_x.$$

Also:

$$\text{es gibt } \mathcal{J}^* = \frac{1}{2} \left\{ x''(x'' - 1) - R'' - 3\gamma'' \right\} - \mu\mu_1 - \mathcal{J}_{01} - \mathcal{J}_{10} - \mathcal{J}_x$$

Doppelpunkte in unserer ebenen Curve welche Mittelpunkte sind

von zwei verschiedenen die Curven C und C_1 je einmal berührenden Kreisen.

Die in dieser Formel auftretenden Grössen x'' , γ'' , δ_{01} , δ_{10} , R'' , δ_x finden sich resp. auf SS. 48, 51, 52, 54.

Wir bestimmen zum Schlusse noch die beiden Indices der Reihe der Kreise welche die Curven C und C_1 zugleich berühren. Es sei ein beliebiger Punkt P gegeben und der zugehörige cyklographische Kegel konstruirt worden; derselbe schneidet die Durchdringungs-

curve der Flächen F und F_1 in $2 \left\{ r r_1 - 2(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1) \right\} = 8(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1) - 4(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1)$ Punkten, und von diesen liegen im Unendlichen:

1° die Punkte der Gruppe e) § 9, S. 27 (Vergleiche auch S. 50). Durch jeden derselben geht der Kegel einfach und die Durchdringungscurve $(\nu - \sigma)$ - und resp. $(\nu_1 - \sigma_1)$ -fach, und die Tangenten fallen alle mit der Tangente an K_∞ zusammen; wir erhalten also im ganzen $4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1) + 4(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1)(\nu - \sigma)$ Schnittpunkte,

2° die Punkte der Gruppe f) § 9, S. 28 resp. 50. In jedem derselben liegen $3(\nu_1 - \sigma_1)$ und resp. $3(\nu - \sigma)$ Schnittpunkte vereinigt, und die Anzahlen der Punkte sind 2σ und $2\sigma_1$. Diese Gruppe gibt also einen Beitrag von $6\sigma(\nu_1 - \sigma_1) + 6\sigma_1(\nu - \sigma)$ neuen Schnittpunkten.

3° die $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)$ einfachen Schnittpunkte der Durchdringung mit K_∞ , herrührend von den gemeinschaftlichen Tangenten von C und C_1 .

Subtrahirt man die Summe dieser drei Anzahlen von der oben angegebenen vollständigen Anzahl, so erhält man die Anzahl der endlichen Schnittpunkte des Kegels mit der Durchdringung, und wenn man beachtet dass diese paarweise symmetrisch liegen in Bezug auf B , so ergibt sich:

der Punktindex der Reihe der die Curven C und C_1 berührenden Kreise ist gleich $(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)(2\mu_1 + \nu_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1)$.

Und diese Formel lässt sich mittelst der nun schon mehrere Male vorgenommenen Manipulation auch herleiten aus der entsprechenden Formel des § 12, S. 40.

Zur Bestimmung des Tangentialindex brauchen wir eine beliebige Gerade g . Die eine der durch dieselbe hindurchgehenden 45° Ebenen schneidet die Durchdringung in $2x''$ Punkten (§ 15, S. 48), und diese liegen, wenn g beliebig ist, alle im Endlichen; also:

der Tangentialindex der Reihe der die Curven C und C_1 berührenden Kreise ist gleich $2x''$.

Wir haben bereits bemerkt dass die Zahl $2x''$ sich in bekannter Weise herleiten lässt aus $2x'$.

§ 16. In diesem letzten § betrachten wir noch kurz die gemeinschaftlichen Punkte von drei cyklographischen Flächen F , F_1 , F_2 , und lösen damit das Apolloni'sche Problem für drei beliebige Curven C , C_1 , C_2 . Zu diesem Zwecke schneiden wir die Durchdringungscurve der beiden ersten Flächen, welche § 15, S. 48 zufolge von der Ordnung $2x''$ ist, mit der dritten, und ziehen die unendlich fernen Punkte ab. Die vollständige Anzahl der Schnittpunkte ist gleich

$$2x''.r_2 = 8(\mu + \nu - 2\varepsilon - \sigma)(\mu_1 + \nu_1 - 2\varepsilon_1 - \sigma_1)(\mu_2 + \nu_2 - 2\varepsilon_2 - \sigma_2) \\ - 4(\mu_2 + \nu_2 - 2\varepsilon_2 - \sigma_2)(\nu - \sigma)(\nu_1 - \sigma_1),$$

und von diesen liegen im Unendlichen:

1°. die $2(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)$ Punkte der Gruppe e) § 9, S. 27, resp. § 15, S. 50. Jeder derselben absorbiert $2(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2)$ Schnittpunkte; wir erhalten also, indem wir auch die entsprechenden Punkte der Fläche F_1 berücksichtigen:

$$4(\mu - 2\varepsilon - 2\sigma)(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2) + 4(\mu_1 - 2\varepsilon_1 - 2\sigma_1)(\nu - \sigma)(\nu_2 - \sigma_2) \\ \text{Punkte.}$$

2°. Die Punkte der Gruppe f) § 9, S. 28, resp. § 15, S. 50. Jeder derselben absorbiert $3(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2)$ resp. $3(\nu - \sigma)(\nu_2 - \sigma_2)$ Punkte, zusammen also $6\sigma(\nu_1 - \sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2) + 6\sigma_1(\nu - \sigma)(\nu_2 - \sigma_2)$.

3°. Die $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)$ einfachen Punkte welche herrühren von den gemeinschaftlichen Tangenten der Curven C und C_1 .

Weil die Fläche F_2 $(\nu_2 - \sigma_2)$ -mal durch K_∞ hindurchgeht so repräsentieren diese Punkte $2(\nu\nu_1 - \sigma\sigma_1)(\nu_2 - \sigma_2)$ einfache Schnittpunkte der drei Flächen.

Nach Subtraktion der in diesen drei Gruppen enthaltenen unendlich fernen Punkte von der Gesamtzahl $2x''.r_2$ und nachheriger Division durch 2 erhält man die Anzahl der Kreise welche die drei vorgelegten Curven C , C_1 , C_2 gleichzeitig berühren. Führt man die Rechnung durch so erhält man zunächst einen Ausdruck welcher in Bezug auf die Charakteristiken der drei Curven nicht symmetrisch ist, aber durch Umrechnung auf eine einfache symmetrische Form gebracht werden kann. So entsteht der folgende Satz:

es gibt:

$$(2\mu + \nu - 4\varepsilon - \sigma)(2\mu_1 + \nu_1 - 4\varepsilon_1 - \sigma_1)(2\mu_2 + \nu_2 - 4\varepsilon_2 - \sigma_2) \\ - 4(\mu - 2\varepsilon)(\mu_1 - 2\varepsilon_1)(\mu_2 - 2\varepsilon_2)$$

Kreise welche die drei Curven C , C_1 , C_2 gleichzeitig berühren.

Die Formel gibt für drei gerade Linien 4, für drei Kreise 8, für 3 Kegelschnitte 184, für 2 Kegelschnitte und einen Kreis 72, für einen Kegelschnitt und zwei Kreise 24, für 2 beliebige Kegelschnitte und eine Parabel 148, einen Kegelschnitt und zwei Parabeln 118, 3 Parabeln 93, für 3 beliebige C_6^3 1620, 3 circulare C_6^3 508, u. s. w.

Schlussbemerkung. Den Ausgangspunkt der vorhergehenden Betrachtungen bildeten die Büschel der Kreise welche in den Punkten der gegebenen Curve die zugehörigen Tangenten berühren. Lässt man alle diese Büschel um 90° drehen so erhält man sämtliche Kreise welche die gegebene Curve rechtwinklig schneiden, und die durch *dieses* Kreissystem abgebildete cyklographische Fläche, deren einfachste Gestalt, abgesehen von der Ebene, durch das gleichseitige Rotationshyperboloid dargestellt wird (nämlich wenn die gegebene Curve ein Kreis ist), und welche also nicht mehr developpabel ist, muss uns belehren über die Kreise welche die gegebene Curve ein oder mehrere Male rechtwinklig schneiden, über den Ort der Punkte von wo aus an die Curve zwei gleich lange Tangenten gelegt werden können, u. s. f. Es fragt sich in wie fern hierbei Resultate zu Tage treten welche die Mühe der Untersuchung lohnen.

Delft, im December 1903.

(10 Mei 1904.)

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA



3 0112 109778529